<36609322950012

<36609322950012

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P 151

Matthesii. Systemata & methodi.

146.

Kiesow

R

Anfangsgründe
der
reinen Mathematik
oder
die gemeine und höhere Rechenkunst, Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie

---

zum Gebrauch
der
Vorlesungen
aufgesetzt
von
M. Johann Carl Fischer.

Bayer. Staatliche Bibliothek München

---

nebst 6 Kupfertafeln.

Jena,
in der Crökerschen Buchhandlung
1792.

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

Herrn

Georg

Herzogen zu Sachsen, Jülich, Cleve und Berg, auch Engern und Westphalen, Landgrafen zu Thüringen, Marggrafen zu Meißen, gefürsteten Grafen zu Henneberg, Grafen zu der Mark und Ravensberg, Herrn zu Raven-stein ꝛc. ꝛc.

Meinem gnädigst-regierenden Fürsten und Herrn von Sachsen-Coburg-Meiningen.

5119

Durchlauchtigste Herzöge,
Gnädigst-regierende Fürsten und Herrn,

Ew. Ew. Ew. Ew. Herzoglichen Durchlauchten gegenwärtige Schrift ehrfurchtsvoll zuzueignen, würde ich mich nicht erkühnen, wenn meine unterthänigste Schuldigkeit mir nicht beföhl, Höchstdenenselben von meinen bisherigen Akademischen Bemühungen eine ehrerbietigste Rechenschaft abzulegen.

Unter den gnädigsten Schutz Ew. Ew. Ew. Ew. Herzoglichen Durchlauch-

lauchten war es meine erste und heilig-
ste Pflicht, den treuesten und eifrigsten
Lehrern mögstlich ähnlich zu werden,
indem ich mich bestrebte, hofnungsvollen
Jünglingen die unentbehrlichen mathe-
matischen Wahrheiten gründlich vorzu-
tragen.

Ueberzeugt, daß nur derjenige al-
lererst mit vollem Nutzen die praktische
Mathematik ausüben könne, welcher
sich die Grundlehren der reinen Mathe-
matik

matik so vollständig, als möglich, eigen gemacht hat, forderte auch ich meine Kräfte auf, diese Lehren etwas ausgebreiteter, als bisher geschah, zu entwerfen.

Mein ganzer Wunsch wird erfüllt seyn, wenn Ew. Ew. Ew. Ew. Herzoglichen Durchlauchten diese meine Bemühung, die, zu Höchstderoselben Füßen zu legen, ich wage, als ein geringes Opfer, derjenigen unbegränzten

ten Ehrfurcht huldreich anzunehmen ge-

ruhen, mit der ich ersterbe

Ew. Ew. Ew. Ew. Herzoglichen

Durchlauchten

Jena,

den 24. Merz

1792.

unterthänigster Knecht

Johann Carl Fischer.

Vorrede.

Ich übergebe dem gelehrten Publico die Anfangsgründe der reinen Mathematik, welche ich zum Gebrauch der Vorlesungen entworfen habe. Der Inhalt dieser Schrift begreift bey der geringen Anzahl von Bogen mehr als die gewöhnlichen Lehrbücher dieser Art, und dennoch hoffe ich bey der mir angenommenen Kürze derselben Gründlichkeit und Vollständigkeit genug gegeben zu haben. Ich hielt es für meine Pflicht, Anfängern so wohl, für welche ich eigentlich schrieb, als auch vielleicht denenjenigen, welche in der Mathematik nicht ganz unbekannt sind, den irrigen Wahn zu benehmen, daß die Rechnung des Unendlichen schwer sey. Der Begrif vom mathematischen Unendlichen bleibt immer relativ. Aus dem Begrife des Endlichen kann unmöglich die Folge gezogen werden, daß es nicht nur eine Gränze hätte, wo es anfieng, sondern auch eine, wo es aufhörte, wie Herr Schulze in

seinem

seinem Versuche einer Theorie des Unendlichen behaupten will. Denn es kann etwas endlich, und doch endlos seyn. So kann eine endliche Größe größer, aber auch kleiner, als jede gegebene Größe werden. Dies wußte schon Euklides, indem er verlangt; lineam terminatam in continuum recta producere (post. II.); item quacunque magnitudine data sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem vel minorem. Es bleibt demnach die Rechnung des Unendlichen in den Gränzen des Endlichen. Diese so genaue Verbindung des Endlichen mit dem Unendlichen kann mich genug rechtfertigen, daß ich die Arithmetik etwas vollständiger, als bisher geschah, aus dem Begrif der Zahlen entwickelte. Man wird also in diesem Buche nicht nur die nothigsten Lehren von den einfachen und unreinen quadratischen Gleichungen, ohne welche auch nicht einmal die gemeine Arithmetik gründlich erlernet werden kann, der Geometrie und Trigonometrie nicht zu gedenken, sondern auch die nöthigsten Lehren von den Funktionen, und die allererstenAnfangsgründe der Differenzial- und Integralrechnung finden. Die Erfahrung hat mich schon hinlänglich belehret, daß Anfänger, welche noch nicht einmal wußten, was Mathematik war, die Arith-

metik

matik nach der Methode, wie ich sie hier vorgetragen habe, oft beßer begriffen haben, als diejenigen, welche schon glaubten, etwas in der Mathematik zu verstehen.

Die Geometrie habe ich aus ihren eigenen Gründen herzuleiten gesuchet, und bin in Ansehung der Schärfe der Beweise so weit als möglich gegangen immer mit der Absicht verbunden, Anfängern alles recht leicht und faßlich zu machen. Die Anwendung der Rechenkunst auf die Geometrie habe ich in eigene Kapitel gebracht, und gezeiget, wie man durch Hülfe der Differenzial- und Integralrechnung die Kreislinie rektificiren, die Kugelfläche im Quadratmaas und den körperlichen Inhalt der Kugel finden könne. Durch diese kleinen Proben glückt es mir vielleicht, daß Anfänger mehr Theorie zu erlernen sich bestreben, um die praktische Mathematik erst alsdenn mit wahren Nutzen treiben zu können.

Aehnliche Proben habe ich in der Trigonometrie bey Berechnug der trigonometrischen Linien gegeben, und dieselbe so vollständig, als es möglich war, abgehandelt.

Vorred

Die erheblichsten Druckfehler sind am Ende angezeigt worden.

Sollte diese meine Schrift mit eben dem Beyfall aufgenommen werden, welche die Paar bereits herausgegebenen von den Freunden der Mathematik erhielten; so werde ich desto mehr aufgemuntert werden, auch die angewannte Mathematik ohngefehr in zweyen solchen Bändchen nach eben dem Plane künftig der gelehrten Welt zu überliefern, der ich mich bestens empfehle.

Jena im Merz des Jahres 1792.

Inhalt.

Inhalt.

Von der Mathematik überhaupt und derselben Lehrat. S. 1—11.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen überhaupt und von der Bezeichnung der Zahlen. S. 12—17.

Zweytes Kapitel.

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen, S. 18—70.

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen und Wurzeln und insbesondere von der Ausziehung der Quadrats und Cubikwurzeln aus den gegebenen Zahlen. S. 70—103.

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnißen und Proportionen. S. 103—120

Fünftes Kapitel.

Von den Gleichungen und Progressionen. S. 120—138.

Anmerkungen die praktische Rechenkunst betreffend. S. 138—158.

Sech-

Inhalt.

Sechstes Kapitel.

Von den Funktionen. S. 158 — 171.

Siebentes Kapitel.

Von der Differenzialrechnung. S. 171 — 182.

Achtes Kapitel.

Von den Logarithmen und von der Anwendung der Differenzialrechnung auf Logarithmen, S. 183 — 200.

Neuntes Kapitel.

Von der Integralrechnung. S. 200 — 203.

Anfangsgründe der Geometrie.

Erster Theil.

Von der ebenen Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von den geraden Linien und ebenen Winkeln. S. 204 — 211.

Zweytes Kapitel.

Von dem Umfange der Figuren. S. 212 — 221.

Drittes Kpitel.

Von den Dreyecken, Parallellinien und Parallelogrammen. S. 221 — 248.

Vier-

Inhalt.

Viertes Kapitel.

Von dem Kreise und den regulären Figuren S. 248—262.

Fünftes Kapitel.

Von der Anwendung der Rechenkunst auf die bisher vorgetragenen Lehren S. 262—272.

Sechstes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Figuren und von der Vergleichung der Flächen geradlinichter Figuren. S. 272—291.

Siebentes Kapitel.

Von der Anwendung der Arithmetik auf die im vorigen Kapitel vorgetragenen Lehren. S. 191—315.

Zweyter Theil.

Von der körperlichen Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von der Lage der Ebenen und geraden Linien. S. 316—328.

Zweytes Kapitel.

Von den Prismen, Pyramiden, Cylindern und Kegeln. S. 329—350.

Drittes Kapitel.

Von der Berechnung des körperlichen Inhalts und der Oberfläche der Prismen, Cylinder, Pyramiden und Kegel. S. 350—358.

Vier-

Inhalt.

Viertes Kapitel.

Von der Kugel S. 358—372.

Anfangsgründe der ebenen Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Von den trigonometrischen Linien und deren Logarithmen. S. 373—392.

Zweytes Kapitel.

Von der Berechnung der Seitenlinien und Winkel geradlinichter Dreyecke und geradlinichter Figuren. S. 392—409.

Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Von den körperlichen und sphärischen Dreyecken. S. 410—419.

Zweytes Kapitel.

Von der Berechnung der sphärischen Dreyecke oder von der eigentlichen sphärischen Trigonometrie. S. 420.

BAYERISCHE
STAATS
BIBLIOTHEK
MÜNCHEN

Von der Mathematik überhaupt und derselben Lehrart.

§. 1.

Dinge von einerley Art, gleichartige Dinge (entia homogenea, eiusdem generis) heißen diejenigen, mit welchen man einen gemeinschaftlichen Begrif verbinden kann, im entgegengesetzten Sinne werden sie Dinge von verschiedener Art, ungleichartige Dinge (entia heterogenea) genennt.

§. 2.

In verschiedenen Rücksichten können Dinge bald als Dinge von einerley Art bald als Dinge von verschiedener Art betrachtet werden.

§. 3.

Eine Menge von Dingen einerley Art nennt man eine **Anzahl.** In so fern nun einer Sache eine Anzahl beygeleget wird, in so fern eignet man ihr eine **Größe** zu. Wenn man sich also eine Größe gedenket, so gedenket man sich etwas, das entweder wirklich oder wenigstens in unserer Vorstellung aus Dingen von einerley Art besteht, welche auch die **Theile** der Größe heißen.

Anmerk. Das Wort **Ding** oder **Theil** wird hier in einem solchen allgemeinen Verstande genommen, daß man darunter alles versteht, was sich gedenken läßt.

§. 4.

Ein Ding wird **endlich** (finitum) genennt, wenn es seine bestimmten Gränzen hat, **unendlich** (infinitum), wenn es keine Gränzen hat.

§. 5.

Eine jede Größe, die da ist, muß endlich seyn, und es giebt in ganz absolutem Verstande keine unendliche Größe.

§. 6.

Die Eigenschaften eines Dinges, woran man dasselbe erkennen, und von andern unterscheiden kann, heißen die **Merkmahle** desselben.

§. 7.

Bey Größen als Größen sind keine andern Merkmahle zu gedenken als Theile von einerley Art. Wenn also Größen von einander unterschieden werden sollen, so muß der Unterschied bloß in der Verbindung der Theile liegen.

§. 8.

In Ansehung der Verbindung der Theile einer Größe sind dieselben entweder zugleich wirklich, oder sie folgen in ihrer Wirklichkeit auf einander. Sind die Theile zugleich wirklich, so ist entweder der eine Theil auffer den andern oder nicht. Im ersten Falle nennt man die Größe **eine ausgedehnte Größe**, im zweyten aber eine **nicht ausgedehnte Größe**. In einer ausgedehnten Grösse sind die Theile entweder so beschaffen, daß zwischen ihnen noch andere gesetzet werden können, oder nicht. Ist jenes, so heißet die ausgedehnte Größe eine **unterbrochene**, ist aber dieses eine ne zusammenhängende, stetige ausgedehnte Größe.

§. 9.

Wenn man die Merkmahle einer Sache, welche an derselben zu erkennen sind, angiebt, so sagt man, man erfinde die **Beschaffenheit** der Sache. Demnach erfindet man die Größe einer Sache, wenn man die Anzahl der Theile, die in dieser Größe enthalten sind, bestimmet.

§. 10.

Soll man also eine Größe erfinden, so sind entweder Theile gegeben, um das Ganze zu finden, oder es ist das Ganze gegeben, um die Theile zu finden. Hieraus schließt man von selbst, daß es überhaupt nur zwey Wege giebt, die Größen der Dinge zu erfinden.

§. 11.

Dinge nennt man **einerley** (eadem), wenn eins für das andere gesetzet werden kann, ohne daß eine Veränderung vorgehet; verschieden aber, wenn dies nicht geschehen kann. Unter verschiedenen Rücksichten können Dinge bald als einerley bald als verschieden betrachtet werden.

§. 12.

Wenn die Menge der Theile der einen Größe einerley mit der Menge der Theile der andern Größe, so werden sie **gleiche Größen** genennt. Ist aber die Menge der Theile der einen Größe nicht einerley mit der Menge der Theile der andern Größe, so heißen sie **ungleiche Größen**, alsdenn ist eine **größer** und die andere **kleiner**. Sind nun zwey Größen gegeben worden, und man stellt eine Prüfung an, ob beide Größen einander gleich oder ungleich sind, so sagt man, man **vergleiche** beyde Größen mit einander.

Anmerk. Das Zeichen der Gleichheit ist (=) und der Ungleichheit (>) so, daß die Oefnung auf die größere Größe weiset.

§. 13.

§. 13.

Diejenige Wissenschaft, welche die Gesetze erkläret aus bekannten Größen andere unbekannte zu erfinden, und Größen mit einander zu vergleichen, heißt die **Mathematik.**

§. 14.

Die Erklärung der Mathematik lehrt es unmittelbar, wie man sie in verschiedene Theile theilen könne. Man betrachtet nemlich die Größen entweder bloß als Ganze oder als Mengen von gleichartigen Dingen, oder man sieht zugleich auf die Verbindung der Theile derselben. In jener Betrachtung gehören sie für die Arithmetik, in dieser aber muß es noch verschiedene Theile der Mathematik geben.

§. 15.

Nach der Eintheilung der Größen des §. 8. kann man noch folgende Theile der Mathematik setzen 1. die Wissenschaft aus bekannten ausgedehnten Größen andere unbekannte zu finden und solche mit einander zu vergleichen, 2. die Wissenschaft aus bekannten nicht ausgedehnten Größen andere zu finden, und selbige mit einander zu vergleichen und endlich 3. die Wissenschaft von Erfindung solcher Größen, die in ihrer Wirklichkeit auf einander folgen. Die erste Wissenschaft läßt sich noch in zwey besondere Theile theilen, indem die ausgedehnten Größen theils unterbrochene theils stetige Größen sind. Weil aber die unterbrochenen ausgedehnten Größen leicht zu bestimmen sind, so würde es überflüßig seyn, diesen Theil der Mathema-

tik besonders abzuhandeln. Im folgenden werden also nur stetige ausgedehnte Größen zu verstehen seyn, wenn von der Ausdehnung der Größe die Rede ist. Die erste Wissenschaft heißt nun die **Geometrie**, die zweyte die **Dynamik** und die dritte die **theoretische Chronologie.**

§. 16.

Eine Größe betrachtet man entweder von allen andern Eigenschaften abgesondert, oder man betrachtet zugleich die Eigenschaften der Sache mit, bey denen sich die Größe findet. Demnach müssen in der Mathematik zwey Haupttheile statt haben, nemlich die **reine** und die **angewannte Mathematik.**

§. 17.

In der reinen Mathematik sind also folgende Wissenschaften zu setzen: 1. die **Rechenkunst**, 2. die **Geometrie**, 3. die **Dynamik** und 4. die **theoretische Chronologie.**

§. 18.

Man hat noch andere Wissenschaften zur reinen Mathematik gerechnet, welche aber alle auf eine von ebenbenannten Wissenschaften gebracht werden können. Dahin gehört die **Trigonometrie** oder die Wissenschaft, unbekannte Seiten oder Winkel eines Dreyeks zu berechnen. Diese wird nach Verschiedenheit der Dreyecke in die **ebene**, und **sphärische** oder **körperliche** Trigonometrie eingetheilt. Noch giebt es allgemeine Kunstgriffe, um aus den bekannten das unbekannte zu finden,

indem

indem man das unbekannte als bekannt ansiehet, und nun rückwärts durch Schlüsse auf dasjenige geleitet wird, was man vorzunehmen hat, das unbekannte zu finden. Diese Kunstgriffe machen die mathematische Erfindungskunst oder die mathematische Analyse aus, welche blos Erweiterungen der Rechenkunst, und daher unter den Nahmen der höhern Rechenkunst enthalten sind.

Anmerk. Weil es gewöhnlich ist, die Dynamik und die theoretische Chronologie zugleich in andern Theilen der Mathematik mit zu erklären, so werde auch hier blos die gemeine und höhere Arithmetik, die Geometrie und die ebene und sphärische Trigonometrie abhandeln.

§. 18.

Der Gegenstand der angewannten Mathematik ist die Körperwelt so wohl im kleinen als grossen. Dahin gehören nun vorzüglich die Kräfte der Körper, das Licht und die himmlischen Körper. Man betrachtet nemlich die festen Körper entweder in Bewegung oder im Gleichgewicht; von dem ersten giebt die **Mechanik**, und von dem zweyten die **Statik** Unterricht. Die flüssigen Körper betrachtet man ebenfalls entweder in Bewegung oder im Gleichgewicht, und hieraus entstehen folgende Wissenschaften, nachdem die flüssigen Körper unelastisch oder elastisch sind; die **Hydraulik**, **Hydrostatik**, **Aerometrie**, **Aerostatik**. Die Erscheinungen des Lichtes, wodurch wir durch das Gesicht Empfindungen haben, veranlaßten die optis-

schen Wissenschaften zu bearbeiten, wohin besonders die Optik, Perspektiv, Catoptrik und Dioptrik gehören.

§. 20.

Die Eintheilungen des Raums und der Zeit auf unserer Erde müssen von den Erscheinungen der Himmelskörper erlernet werden, und hiervon geben die astronomischen Wissenschaften Unterricht, welche die Astronomie, die mathematische Geographie, die Gnomonik und die praktische Chronologie unter sich begreifen. Man hat auch die Artilleriewissenschaft, die bürgerliche und Kriegsbaukunst zur angewandten Mathematik gerechnet. Diese erfordern aber ausser der Rechenkunst, Geometrie, Mechanik u. s. in der Ausübung noch eine Menge anderer Kenntnisse, die nicht mathematisch sind.

§. 21.

Die Mathemarik hat ihren Namen von dem griechischen Worte μαθησις oder μαθημα (doctrina, disciplina) erhalten, weil sie bei den Griechen als die einzige Wissenschaft betrachtet wurde, nach welcher man richtig denken lernte. Deswegens wurde sie auch beständig als eine Vorbereitung zu den philosophischen Wissenschaften getrieben. Warum aber ihre Lehren so evident, daß jeder ihnen Beifall geben muß, ist strittig. Einige setzen die Gewißheit der Mathematik in die Lehrart derselben, andere in den Gegenstand der Größe, und noch andere in beides zugleich. Diese lezte Meynung

nung scheint auch die mehresten und triftigsten Gründe zu haben. Mündlich lassen sich diese Gründe mehr auseinander setzen.

§. 22.

Die Ordnung, nach welcher die Lehren einer Wissenschaft vorgetragen werden, heißt überhaupt die **Lehrart**. Die mathematische Lehrart ist so beschaffen, daß von allen Dingen, die zur Mathematik gehören, zuerst **Erklärungen** gegeben werden d. h. man zeiget deutlich und genau, in welchem Verstande dieselben genommen werden, und geht nie davon ab. Sind alsdenn die angezeigten Merkmahle der Sache, wovon die Erklärung gegeben wird, hinreichend, dieselbe von allen andern zu jeder Zeit zu unterscheiden, so nennt man sie **Nominal** oder **Worterklärungen**. Oefters zeigen aber auch diese Merkmahle die Art und Weise, wie die Sache erzeuget wird, und sodann heisen sie **Sacherklärungen**. Z. E. Eine Linie ist eine Ausdehnung in die Länge ohne alle Breite und Dicke ist eine Worterklärung, hingegen eine Linie entsteht durch die Bewegung eines Punktes eine Sacherklärung.

§. 23.

Aus den Erklärungen sucht man Sätze herzuleiten, deren Wahrheit einem jeden einleuchtend ist, und die man in **theoretische** und **praktische** eintheilet. Die theoretischen Säze drucken nemlich aus, daß etwas so und nicht anders seyn kann, die praktischen aber verlangen, daß etwas zu Stande

gebracht werden soll. Die ersten nennt man Grundsäze (axiomata), und die zweyten Forderungssäze (postulata).

§. 24.

Theoretische Sätze, von deren Wahrheit man nicht sogleich überzeuget ist, heißen Lehrsätze (theoremata), und die Anführung der Gründe, woraus die Wahrheit eines Lehrsatzes erhellet, der Beweis; hingegen praktische Sätze, bey welchen dasjenige, was verlangt wird, nicht sogleich klar ist, heißen Aufgaben (problemata). Den Innbegriff der Regeln, nach welchen das verlangte zu Stande gebracht wird, nennt man die Auflösung der Aufgabe, und die Anführung der Gründe, aus welchen die Richtigkeit der Auflösung erhellet, den Beweis davon.

§. 25.

Solche Sätze, welche aus dem kurz zuvor gesagten leicht gefolgert werden können, haben den Namen Zusäze (corollaria) erhalten. Ausserdem pflegt man auch wohl noch etwas, das zu wissen nüzlich ist, ohne daß es eben in den Zusammenhang der Lehren gehöret, welche die Wissenschaft ausmachen, beyzubringen, und das trägt man in den Anmerkungen (scholia) vor.

§. 26.

Uebrigens theilt man noch beym Vortrage selbst die Lehrart in synthetische und analytische ein. Bei der synthetischen fängt man von Erklärungen

und

und Grundsäzen an, und sucht alsdenn mittelst Vernunftschlüsse diejenigen Sätze zu beweisen, welche erwiesen werden sollen. Bey der analytischen aber geht man von den Sätzen, welche bewiesen werden sollen, aus, und schließt zurück bis auf die Grundsätze und Erklärungen, woraus sie sich herleiten lassen. Beyde lassen sich bequem mit einander verbinden, und eine solche vermischte ist zum Vortrage der Wissenschaften am geschiktesten.

§. 27.

Aus dieser kurzen Vorstellung der mathematischen Wissenschaften sieht man deutlich, wie groß und weit ausgebreitet der Nutzen der dahin gehörigen Kenntnisse ist. Ein Staatsmann, ein Künstler, ein Handwerker, ja jeder Mensch von dem erhabensten bis zum niedrigsten Stande wird es einstimmig bekennen müssen, daß ihm die Mathematik in Ausführung mancher Geschäfte, zur Vervollkommenung der Geschicklichkeiten und zum nöthigen Gebrauch im gemeinen Leben unentbehrlich sey. Einem angehenden Gelehrten aber leistet sie auch nur in den ersten Anfangsgründen der reinen Mathematik um deswillen vorzügliche Dienste, weil sie die vortreflichste ausübende Vernunftlehre ist.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen überhaupt und von der Bezeichnung der Zahlen.

§. 1.

Erklärung.

Wenn man sich eine Zahl vorstellet, so gedenket man sich eine Größe, deren Theile zusammengenommen ein Ganzes ausmachen. Ein jeder von den Theilen der Größe wird alsdenn die Einheit (unitas) genennt, daß also eine Zahl als eine Menge von Einheiten angesehen werden kann.

§. 2.

Zusatz.

Es läßt sich demnach eine jede Größe als eine Zahl betrachten, und wenn man nach Begriffen richtig denken will, so muß auch die Arithmetik so allgemein vorgetragen werden, als sich aus dem Begrif der Zahlen beweisen läßt. Nur die Bezeichnung der Zahlen macht einen Unterschied unter der gemeinen und allgemeinen Artihmetik.

§. 3.

§. 3.

Erklärung.

In einer Zahl betrachtet man entweder jede Einheit für sich als ein Ganzes oder man sieht sie als Theile eines andern Ganzen an, Jene Zahl heißt eine **ganze** und diese eine **gebrochene Zahl** oder ein **Bruch**.

§. 4.

Zusatz.

Man kann sich also eine ganze Zahl als eine gebrochene und umgekehrt eine gebrochene als eine ganze gedenken. Hieraus sieht man leicht, daß der Begrif von einer gebrochenen Zahl blos relativ ist, und daß überhaupt alles das bey gebrochenen Zahlen gelten müsse, was von ganzen Zahlen wird erwiesen werden.

§. 5.

Erklärung.

Entgegengesezte Größen heisen diejenigen, welche zwar unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriffe enthalten sind, (wie Schulden und Vermögen unter dem Worte Haabseligkeiten, vor- und rückwärts gehen unter Bewegung u. s.) aber eine solche Beziehung gegen einander haben, daß die eine um eben so viel abnimmt, als die andere wächst und umgekehrt. Eine von diesen, welche man will, ist alsdenn bejahend oder **positiv**, und die ihr entgegengesezte verneinend oder **negativ**

tiv. Man bezeichnet gemeiniglich die bejahende durch das Zeichen (+) und die verneinende durch (—).

§. 6.

Erklärung.

Zusammengesetzte Größen werden diejenigen genannt, deren Theile mit den Zeichen + und — verbunden sind, die also entweder bejahend oder verneinend, oder beydes zugleich sind.

§. 7.

Erklärung.

Bestimmte Zahlen heißen diejenigen, deren Menge von Einheiten angegeben werden, unbestimmte aber nimmt man im entgegengesetzten Sinn.

§. 8.

Erklärung.

Zählen heißt untersuchen, wie viel Einheiten eine bestimmte Zahl enthalte.

§. 9.

Willkührliche Sätze.

Man zähle von Eins bis Zehen, alsdann fange man wieder von vorne an, und setze jedesmal hinzu, wie vielmal schon bis zehen ist gezählet worden, wobey die kurzen Wörter zu gebrauchen sind, zwanzig, dreyßig, vierzig u. s. Hat man auf diese Weise fortgezählet bis auf hundert, so zähle man von neuen hundert und nochmals hundert u. s. w.

bis

bis zehnhundert oder tausend. Auf diese Weise zähle man fort bis tausendmaltausend oder Million, ferner tausendmaltausend Millionen oder Billion, tausendmaltausend Billionen oder Trillion u. s. w.

§. 10.

Erklärung.

Numeriren heißt eine gegebene bestimmte Zahl zu bezeichnen und richtig auszusprechen.

§. 11.

Willkührliche Sätze.

Man bezeichne die neun ersten Zahlen mit den ganz bekannten Zeichen, welche Ziffern genennet werden, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und lasse eine jede von diesen Ziffern in der ersten Stelle von der Rechten gegen die Linke gerechnet Einheiten, in der zweyten Stelle Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende, in der fünften Zehntausende, in der sechsten Hunderttausende, in der siebenden Millionen u. s. gelten so, daß also jede folgende Ziffer zehnmal mehr bedeute, als die nächstvorhergehende, allemal von der Rechten gegen die Linke gerechnet. So sey z. E. 364 dreyhunderte, sechs zehner und vier Einheiten oder wie man zu sprechen pfleget, dreyhundert und vier und sechzig. Würde nun eine von den neun einfachen Ziffern so bestimmt, daß sie in der Stelle der hunderter stehen sollte, so schreibe man in der ersten und zweyten Stelle das Zeichen o (Null) als ein Zeichen einer leeren Stelle. Auf diese Weise schreibe man z. E. vierhundert 400.

§. 12.

Zusatz.

Es bestehen demnach die zusammengesezten Ziffern aus einfachen Ziffern von verschiedenen Decimalordnungen. Die Ziffern in der zweyten Stelle bedeuten nemlich zehnfache Einheiten, und gehören zur ersten Decimalordnung, die Ziffern in der dritten Stelle bedeuten zehnmal mehr als die Zehner, und gehören zur zweyten Decimalordnung.

§. 13.

Aufgabe.

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl richtig auszusprechen.

Auflösung.

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, und gebe jeder Classe sechs Ziffern, da denn für die höchste Classe weniger als sechs Ziffern übrig bleiben können.
2. Hiernächst mache man oben über die siebende Ziffer ein Strichelchen, über die dreyzehende zwey über die neunzehnte drey u. s. f. und spreche ein Strichelchen durch Millionen, zwey durch Billionen, drey durch Trillionen u. s. aus.
3. Eine jede von den Classen n. 1. kann wiederum durch ein untengesezтes Strichelchen, welches durch tausend ausgesprochen wird, in zwey Classen von der Rechten gegen die Linke getheilet werden, wovon eine jede drey Ziffern bekommt.

bekommt. Nun kommt es blos darauf an, wie eine Zahl von drey Ziffern ausgesprochen wird (§. 11.), da sodann eine noch so große Zahl richtig ausgesprochen werden kann. Z. E.

$$364{,}283'''\,|\,200{,}600''\,|\,008{,}324'\,|\,326{,}004$$

§. 14.

Willkührlicher Satz.

Die unbestimmten Zahlen bezeichne man mit den kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c, d u. s.

§. 15.

Grundsätze.

Eine jede Größe ist sich selber gleich, und das Ganze ist so groß als seine Theile zusammengenommen; ein jeder oder etliche Theile des Ganzen aber sind kleiner als das Ganze.

§. 16.

Grundsätze.

Zwey Größen, welche einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich, und eine Größe, welche grösser oder kleiner als eine von zweyen gleichen Grössen, diese muß auch größer oder kleiner als die andere seyn; um so mehr ist also auch eine Zahl grösser oder kleiner als eine von zweyen ungleichen Grössen, wenn sie größer oder kleiner als die grösste oder kleinste von den ungleichen Größen ist.

Zweytes Kapitel.

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen.

§. 17.

Erklärung.

Eine Gröſe, welche zweyen oder mehreren Gröſſen zusammengenommen gleich ist, heißt ihre **Summe** oder **Aggregat**. Die Gröſſen, welche eine Summe ausmachen sollen, müssen von einerley Art seyn, und verschiedene gegebene Gröſſen von einerley Art **addiren** heißt ihre Summe finden. Die gegebenen Zahlen werden auch die **Aggreganden** oder die zu summirenden **Theile** genennt.

Anmerk. Um Gröſſen zu addiren, bedient man sich des Zeichens +, welches durch plus oder mehr oder und ausgesprochen wird. So ist die Summe von $6+4=10$; $a+b=y$.

§. 18.

Zusatz.

Um so viel die Aggreganden gröſſer oder kleiner werden, um so viel muß auch die Summe gröſſer oder kleiner werden. Wird z. E. 6 und 4 um 3 Einheiten gröſſer, so muß auch 10 um 3 Einheiten gröſſer werden.

§. 19.

Erklärung.

Wenn von einer gegebenen Gröſe eine andere weggenommen wird, so heißt die, welche übrig

bleibt

bleibt, die **Differenz**, der **Unterschied**, der **Rest**, *und* eine Größe von einer andern subtrahiren die Differenz derselben suchen. Die Grösse, *von* welcher eine andere subtrahiret werden soll, heißt auch das **Subtrahendum**, und welche *von* dem Subtrahendo weggenommen wird, der **Subtraktor.**

Anmerk. Das Zeichen der Subtraktion ist ein Querstrich (—) und wird durch minus oder weniger ausgesprochen. So bedeutet $6 - 2 = 4$; $a - b = y$.

§. 20.

Zusatz.

Wenn der Subtraktor einerley bleibt, so muß die Differenz um so viel größer oder kleiner werden, um so viel das Subtrahendum größer oder kleiner wird. Bleibt aber das Subtrahendum einerley, so wird die Differenz um so viel kleiner als der Subtraktor größer wird, und um so viel größer als der Subtraktor kleiner wird. Wenn z. E. die Zahl 2 um 2 größer wird, so wird die Differenz 4 um 2 Einheiten kleiner; wird aber die Zahl 2 um 1 kleiner, so wird die Differenz 4 um 1 größer also 5. Man kann also setzen $(6 + 2) - 2 = 4 + 2$; $(6 - 2) - 2 = 4 - 2$; $6 - (2 + 2) = 4 - 2$; und $6 - (2 - 1) = 4 + 1$.

§. 21.

Zusatz.

Man addiret also entgegengesetzte Größen, wenn man die negativen von den positiven subtrahiret;

hingegen subtrahiret man entgegengesetzte Größen von einander, wenn man die positiven Größen des Subtraktors von dem Subtrahendo subtrahiret, und die negativen desselben zu dem Subtrahendo addiret.

§. 22.

Grundsatz.

Wenn man zu einer Zahl eine andere addiret, und von dieser Summe die nemliche addirte Zahl wieder subtrahirt, oder Anfangs davon subtrahirt, und hernach die nemliche addiret, so leidet dadurch die erste Zahl keine Aenderung. Es ist nemlich $6 + 4 - 4 = 6 - 4 + 4 = 6$, oder $a + b - b = a - b + b = a$.

§. 23.

Zusatz.

Soll demnach zu einer Zahl eine oder mehrere andere addiret, und von dieser Summe eine oder mehrere dritte subtrahiret werden, so muß einerley Resultat entstehen, man mag entweder zu der Zahl die andern addiren und von dieser Summe die dritten subtrahiren, oder von der Zahl die dritten subtrahiren, und die andern zu dieser Differenz addiren. So ist z. E. $8 + 4 - 3 = 8 - 3 + 4$, und $a + b - c = a - c + b$.

§. 24.

Grundsätze.

Gleiches zu gleichen addiret oder vom gleichen subtrahiret, giebt gleiche Summen und gleiche Differen-

Differenzen; gleiches zu ungleichen addiret oder vom ungleichen subtrahirt giebt ungleiche Summen oder ungleiche Differenzen. Ist z. E. $8 = 8$, so ist auch $8 + 4 = 8 + 4$ und $8 - 4 = 8 - 4$ Wäre ferner $12 + 3 = 15$, so muß auch $12 + 3 - 3 = 15 - 3 = 12$ seyn (§. 22.); also auch, wenn $a + b = y$, $a + b - b = y - b = a$.

§. 25.

Grundsatz.

Wenn von zwey gleichen Zahlen ungleiche subtrahiret werden, so giebt die kleinere eine größere Differenz.

z. E. $6 = 6$ oder $a = a$

$4 > 2$ $b > c$

$2 < 4$ $a - b < a - c$

§. 26.

Forderungssatz.

Zwey oder mehrere Zahlen, welche durch Ziffern ausgedruckt sind, und deren keine über 9, können leicht in Gedanken zusammengezählet werden. Auch läßt sich eben so leicht von einer Zahl, welche nicht größer als 18 ist, eine andere einfache Ziffer in Gedanken wegnehmen.

§. 27.

Aufgabe.

Die Summe verschiedener gegebener durch Ziffern geschriebene Zahlen zu finden.

Auflösung.

1. Man setze die Ziffern der gegebenen Zahlen so unter einander, daß einerley Decimalordnungen unter einander zu stehen kommen, und ziehe um die Verwirrung zu meiden eine gerade Linie darunter.
2. Addire man von der Rechten gegen die Linke jede Columne für sich, und setze jedesmal die niedrigste Ziffer unter die addirte Columne, und rechne, was zur folgenden Stelle gehöret, zur folgenden Columne. Z. E.

6483924
5364238
943607

12791769 Summe.

§. 28.
Erklärung.

Wenn bei einer unbestimmten Zahl eine bestimmte Zahl stehet, so heißt diese der Coefficient, steht die unbestimmte Zahl allein, so ist der Coefficiente Eins.

§. 29.
Aufgabe.

Die Summe gegebener unbestimmter Zahlen zu finden.

Auflösung.

1. Fall. Sind die Zahlen einfach, oder aus einfachen Theilen zusammengesetzte Zahlen, so

setze man dieselben zusammen in welcher Ordnung man will. So ist z. E. die Summe von a, b, c, d u. s. f. $a+b+c+d$. Soll aber zu $a-b+c$ die zusammengesetzte Zahl $h+i-m$ addiret werden, so erhält man $a-b+c+h+i-m = a+c+h+i-b-m = (a+c+h+i)-(b+m)$. (§. 20. 21. 23.)

2. Fall. Sind die gegebenen Zahlen mit Coefficienten geschrieben worden, so setze man die gleichen unbestimmten Zahlen unter einander. Sind nun bey gleichen Zahlen die Zeichen einerley nemlich + oder —, so addire man ihre Coefficienten, und setze an deren Summe rechter Hand die gleiche Zahl mit dem nemlichen Zeichen + und —. Sind aber die Zeichen bey gleichen Zahlen verschieden nemlich + und —, so addire man diejenigen zusammen, welche + und — haben, subtrahire alsdenn die kleinere Summe von der größern, und setze diese Differenz mit dem Zeichen der größern Summe in die verlangte Summe. (§. 21.) Z. E.

$$\begin{array}{r} 3a+5b+6c-8d-20f \\ 6a-3b+4c+9d-6f \\ -4a+6b+3c-5d-f \\ \hline 5a+8b+13c-4d-27f \end{array}$$ Summe.

§. 30.

Aufgabe.

Die Differenz zweyer Zahlen, welche mit Ziffern geschrieben sind, zu finden.

Auflösung.

1. Man schreibe die Ziffern so unter einander, wie bey der Addition; subtrahire alsdenn von der Rechten gegen die Linke eine jede untenstehende Ziffer von der über ihr stehenden. Z. E.

4389654
3164232
1225422 Differenz.

2. Sollte eine Ziffer in der obern Reihe befindlich seyn, welche kleiner als die darunter stehende, so borge man linker Hand in der nächstfolgenden obern Ziffer Eins, welche in dem Orte, wo subtrahirt wird, 10 bedeutet, addire nun diese 10 zu der Ziffer, von welcher subtrahiret werden soll, und verrichte nunmehr die Subtraktion. Z. E.

6.4.38.64
58293
585571 Differenz.

3. Sollten endlich in der obern Reihe leere Stellen vorkommen, so gehe man fort, bis man eine Ziffer antrift, von dieser borge man Eins, alsdenn werden alle leere Stelle 9, die Stelle aber, wovon zuerst subtrahiret wird, 10. z. E.

999
7.3.00043
2684362
46 15681 Differenz.

§. 31.

Aufgabe.

Die Differenz zweyer unbestimmten Zahlen zu finden.

Auflösung.

1. Fall. Ist der Subtractor so wohl als das Subtrahendum eine einfache Zahl, und beide entweder positiv oder negativ, so verbinde man den positiven Subtractor mit dem Subtrahendo durch das Subtractionszeichen, den negativen Subtractor aber durch das Additionszeichen. So bedeutet + b von + a oder — a subtrahirt a — b, oder — a — b hingegen — b von + a oder — a subtrahirt + a + b oder — a + b (§. 21.)

2. Fall. Sind die gegebenen Zahlen aus einfachen Theilen zusammengesetzt, so subtrahire man die positiven Theile des Subtractors von dem Subtrahendo, die negativen aber addire man. Soll man z. E. von a — b + c — d die Zahl a — f + m — n subtrahirt werden, so ist die Differenz a — b + c — d — a + f — m + n = c + f + n — b — d — m = (c + f + n) — (b + d + m). (§. 21.)

3. Fall. Sind die gegebenen unbestimmten Zahlen mit Coefficienten geschrieben, so setze man den Subtractor unter das Subtrahendum wie bey der Addition §. 29. n. 2., verwandele die Theile des Subtractors, welche mit — bezeichnet sind in +, und die mit + bezeichnet sind, in —, und addire sodann nach §. 29. n. 2. Z. E.

$$\begin{array}{r} 5a - 3b + 6c - 3d + g \\ 3a - 5b - 3c + 2d - 6g \\ - \quad + \quad + \quad - \quad + \\ \hline 2a + 2b + 9c - 5d + 7g \end{array}$$

§. 32.

Zusatz.

Aus dem bisher angeführten erhellet zur Genüge, daß die Addition und Subtraction einander entgegengesetzte Rechnungsarten sind, daß sie folglich einander zur Probe dienen können, ob recht ist gerechnet worden.

§. 33.

Erklärung.

Eine Größe durch eine ganze Zahl **multiplicieren** heißt eine Größe finden, in welcher die gegebene Größe so vielmal enthalten ist, als die ganze Zahl Einheiten in sich begreifet. Die Größe, welche multipliciret werden soll, heißt das **Multiplikandum**, die Zahl, womit das Multiplicandum multipliciret wird, der **Multiplikator**, und die Größe, welche gefunden wird, das **Produkt** oder **Faktum**. Auch nennt man das Multiplikandum und den Multiplikator gemeinschaftlich **Faktoren, Efficienten, Dimensionen.**

Anmerk. Das Zeichen der Multiplikation ist ein Querkreutz ($\times$), oder ein Punkt (.), oder auch, wenn man die Faktoren in Clammern schließt, oder die Buchstaben an einandersetzt. Z. E.

E. 6 ✕ 3 = 6. 3 = (6)(3), und a ✕ b = a. b = (a) (b) = ab.

§. 34.

Zusatz.

Das Produkt ist so vielmal größer als das Multiplikandum, so vielmal der Multiplikator grösser als die Einheit ist. Es muß demnach das Produkt entstehen, wenn man das Multiplikandum so vielmal zu sich addiret, als der Multiplikator Einheiten hat.

§. 35.

Erklärung.

Eine Größe durch eine ganze Zahl **dividiren** heißt eine Größe finden, welche in der gegebenen so vielmal enthalten ist, als die ganze Zahl Einheiten in sich begreift. Die Größe, welche dividiret wird, heißt das **Dividendum**, die Zahl, durch welche dieses dividiret wird, der **Divisor**, und die Größe, welche gefunden wird, der **Quotient**.

Anmerk. Das Zeichen der Division ist ein Colon (:) oder wenn man unter das Dividendum einen Strich machet, und darunter den Divisor setzet. Z. E. $6 : 3 = \frac{6}{3}$ und $a : b = \frac{a}{b}$

§. 36.

Zusatz.

Der Quotient ist um so vielmal kleiner, als das Dividendum, so vielmal Eins kleiner als der Divisor ist.

§. 37.

§. 37.

Zusatz.

Wenn der Divisor einerley bleibet, so muß der Quotient 2mal, 3mal — — nmal größer werden, wenn das Dividendum 2mal, 3mal — — nmal größer wird, aber so vielmal kleiner, so vielmal das Dividendum kleiner wird. Bleibt aber das Dividendum einerley, so wird der Quotient 2mal, 3mal — — nmal kleiner, wenn der Divisor 2mal, 3mal — — nmal größer wird, er wird aber 2mal, 3mal — — nmal größer, wenn der Divisor 2mal, 3mal — — nmal kleiner wird.

§. 38.

Grundsatz.

Wenn eine Größe durch eine Zahl multipliciret, und dieses Produkt mit der nemlichen Zahl wieder dividiret, oder zuerst dividiret, und darauf wieder multipliciret wird, so ändert sich dadurch die Größe nicht. So ist $8 : 4 \times 4 = 8$ und $8 \times 4 : 4 = 8$, $\frac{a \times b}{b} = a$ und $a : b \times b = a$.

§. 39.

Zusatz.

Wenn demnach eine Größe durch eine Zahl multipliciret, und dieses Produkt durch eine andere Zahl dividiret werden soll, so muß einerley Resultat herauskommen, man mag die Größe zuerst mit der ersten Zahl multipliciren, und dieses Produkt

durch

durch die andere Zahl dividiren, oder dieselbe durch die andere Zahl dividiren und diesen Quotienten durch die erste Zahl multipliciren. Z. E. $(4 \times 3) : 2 = (4 : 2) \times 3$ oder $(a : b)\, c = ac : b$.

§. 40.

Grundsätze.

Gleiches durch gleiches multipliciret oder dividiret, giebt gleiche Produkte oder gleiche Quotienten. Ungleiches durch gleiches multipliciret oder dividiret giebt ungleiche Produkte oder ungleiche Quotienten. Z. E.

$6 = 6$	$a = b$
$3 = 3$	$c = c$
$6.3 = 6.3$	$ac = bc$

§. 41.

Grundsatz.

Wenn zwey gleiche Zahlen durch ungleiche dividiret werden, so wird der Quotient größer, wo der eine Divisor kleiner ist. Z. E.

$8 = 8$	$a = b$
$4 > 2$	$c > d$
$8:4 < 8:2$	$a:c < b:d$

§. 42.

Grundsätze.

Wenn das Multiplikandum und der Multiplikator zusammengesetzte Zahlen sind, so findet man das Produkt, wenn man alle Theile des Multiplikandi

kandi mit jedem Theile des Multiplikators multipliciret, und alle partielle Produkte in eine Summe bringt. Auch wenn das Dividendum eine zusammengesetzte Zahl ist, und der Divisor eine einfache, so erhält man den Quotienten, wenn man alle Theile des Dividendi mit dem Divisor dividiret, und hiernächst alle einzelne Quotienten in eine Summe bringt.

§. 43.

Zusatz.

Wenn das Multiplikandum größer oder kleiner wird, der Multiplikator aber einerley bleibt, so wird das ganze Produkt um das Faktum der Vergrößerung oder Verminderung des Multiplikandi mit dem Multiplikator größer oder kleiner. Bleibt aber das Multiplikandum einerley, und der Multiplikator wird um einen Theil vergrößert oder vermindert, so muß auch das ganze Produkt um ein anderes Produkt größer oder kleiner werden, welches entstehet, wenn die Vermehrung oder Verminderung des Multiplikators in das Multiplikandum ist multipliciret worden. Bleibt ferner der Divisor einerley, so wird der Quotient um einen Theil vergrößert oder verkleinert, welcher entsteht, wenn die Vermehrung oder Verminderung des Dividendi durch eben den Divisor dividiret wird. Z. E. Wird das Multiplikandum 4 um 2 kleiner, so wird das Produkt, wenn der Multiplikator 3 ist, $= 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6$. Wird aber auch der Multiplikator um 1 kleiner so wird das Produkt $(4 - 2)(3 - 1) = (12 - 6) - (4 + 2) =$

12 —

$12 - 6 - 4 + 2 = 4$; also auch $(a - b)(c - d) = ac - cb - ad + db$.

§. 44.

Zusatz.

Entgegengesetzte Größen geben verneinende Produkte und verneinende Quotienten, nicht entgegengesezte aber bejahende Produkte und bejahende Quotienten.

§. 45.

Lehrsatz.

Wenn die beyden Faktoren a und b des Produktes ab ganze Zahlen sind, so geben sie mit veränderter Ordnung einerley Produkt.

Beweis.

Wenn man a durch b multipliciren soll, so soll man a so vielmal zu sich addiren als b Einheiten hat. Es ist aber gleichviel, ob man a so vielmal zu sich addiret als b Einheiten hat, oder ob man jede Einheit von a so vielmal größer macht als b anzeigt d. h. b so vielmal zu sich addiret, als a Einheiten hat oder b durch a multipliciret. Demnach ist $ab = ba$.

§. 46.

Zusatz.

Man sieht leicht ein, daß dieser Satz auch statt haben müsse, wenn gleich mehr als zwey Zahlen in einander multipliciret werden sollen.

§. 47.

Forderungssatz.

Man kann das Produkt zweyer bestimmten Zahlen, deren keine größer als 9 ist, leicht in Gedanken finden, wenn man die eine Zahl so vielmal zu sich addiret, als die andere Einheiten hat. Auf diese Art findet man alle mögliche Produkte zweyer Zahlen, wovon keine 9 übertrift. Um dieses desto begreiflicher vorzustellen, schreibe man die ersten 9 Ziffern in eine Reihe hin, addire sodann eine jede zu sich selbst, eine jede von diesen Summen addire man abermals zu den einfachen Ziffern u. s. da alsdenn folgende Tafel entsteht, welche das Einmal Eins genennt wird.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 48.

Aufgabe.

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl durch eine einfache Ziffer zu multicipliren.

Auflösung.

Man multiciplire von der Rechten gegen die Linke eine jede Ziffer des Multiplikandi mit dem Multi-

Multiplikator, setze die niedrigste Ziffer eines jeden partiellen Produktes in eben die Stelle, als die Ziffer des Multiplikandi stehet, und addire die höchste Ziffer desselben zum nächstfolgenden Produkte (§. 42.) z. E.

348276	806300
9	5
3134484 Prod.	4031500 Prod.

§. 49.

Zusatz.

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl multiplicirt man mit 10, 100, 1000, 10000 u. s. wenn man der Zahl eine, zwey, drey, vier u. s. Nullen beyfüget.

§. 50.

Aufgabe.

Zwey Ziffern in einander zu multipliciren, deren jede Nullen bey sich führet.

Auflösung.

Man multiplicire beyde Ziffern in einander, und setze rechter Hand an dieses Produkt so viele Nullen, als beyde Faktoren zusammen haben. Z. E.

50000
9 000
45000000 Prod.

Denn es ist 50000 = 10000 × 5 und 9000 = 1000 × 9, folglich 50000 × 9000 = 5 × 10000

10000 × 9 × 1000 = 5 × 9 × 10000 × 1000. (§. 46. 49.)

§. 51.

Aufgabe.

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl durch eine andere zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire alle Ziffern des Multiplikandi mit einer jeden Ziffer des Multiplicators, setze aber die niedrigste Ziffer eines jeden folgenden Produktes des Multiplikandi mit der folgenden Ziffer des Multiplikators um eine Stelle gegen die Linke weiter hinein. Hiernächst addire man die gefundenen Produkte zusammen, die Summe ist das Hauptprodukt. (§. 42.) z. E.

34c686
543

1022058
1362744
1703430

184992498 Prod.

§. 52.

Aufgabe.

Unbestimmte Zahlen in einander zu multipliciren.

Auflösung.

1. Fall. Sind die Faktoren zusammengesetzte positive Zahlen, so multiplicire man alle Theile des Mul-

Multiplikandi mit einem jeden Theile des Multiplikators, und addire diese partiellen Produkte (§. 42.) Z. E,

(a + b + c + d) (g + h) = ag + bg + cg + dg + ah + bh + ch + dh.

2. Fall. Wenn die Faktoren zusammengesetzte positive und negative Zahlen sind, so multiplicire man wie im ersten Falle, nur gebe man dem Produkte das Zeichen +, wenn beyde Theile des Multiplikandi und des Multiplikators, die in einander zu multipliciren sind, die Zeichen + oder — vor sich haben. Hat aber ein Theil + und der andere —, so gebe man dem Produkte das Zeichen — (§. 44.) Z. E.

a — b	a + b
c — d	a — b
ac — cd — ad + db	aa + ab
	— ab — bb
	aa — bb

3. Fall. Sind die Theile der Faktoren Produkte, so verrichte man die Multiplikation eben so. z. E.

ab + bc + cd
a — c

— abc — bcc — ccd
+ aab + abc + acd

aab — bcc — ccd + acd Prod-

4. Fall. Sind endlich die Theile der Faktoren mit Coefficienten geschrieben, so multiplicire man sowohl die Coefficienten eines jeden Theils des Multiplikators mit den Coefficienten aller Theile des Multiplikandi, als auch eine jede unbestimm-

te Zahl des Multiplikators mit allen unbestimmten Zahlen des Multiplikandi. Z. E.

$$\begin{array}{r} 4a - 3ab - 4c \\ 2ab - c \\ \hline -4ac + 3abc + 4cc \\ 8aab - 6aabb - 8abc \\ \hline 8aab - 4ac - 6aabb - 5abc + 4cc. \end{array}$$

§. 53.

Erklärung.

Um einen Bruch auszudrucken, sind zwey ganze Zahlen nöthig, wovon die eine anzeigt, in wie viel gleiche Theile das Ganze eingetheilet sey, die andere aber, wie viel solcher Theile den Bruch ausmachen. Jene heißt der Nenner und diese der Zähler des Bruchs. Man bezeichnet beyde Zahlen so, daß man unter den Zähler einen Strich macht, und darunter den Nenner setzet, wie $\frac{5}{6}$ oder $\frac{a}{b}$.

§. 54.

Lehrsatz.

Jeder Quotient ist mit einem Bruche einerley, welcher zum Zähler das Dividendum und zum Nenner den Divisor hat.

Beweis.

Ein jedes Dividendum läßt sich in seine Einheiten zerlegen. Dividiret man nun jede Einheit mit dem

dem Divisor, so werden diese Quotienten gleiche Theile von einem Ganzen. Die Summe aller dieser Quotienten ist der Quotient selbst, welcher durch die Division entsteht (§. 42.) Aber eben diese Summe der Quotienten ist ein Bruch, dessen Nenner angiebt, in wie viel Theile das Ganze getheilet worden, und welcher der Divisor ist; der Zähler aber, wie viel solcher Theile genommen sind, welcher das Dividendum ist.

§. 55.
Zusatz.

Es ist demnach auch umgekehrt ein jeder Bruch mit einem Quotienten einerley, wenn der Zähler das Dividendum und der Nenner der Divisor ist.

§. 56.
Erklärung.

Ist der Nenner eines Bruchs größer als sein Zähler, so heißt der Bruch ein ächter, eigentlicher Bruch, im entgegengesetzten Fall aber ein unächter, uneigentlicher Bruch.

§. 57.
Zusatz.

Ein ächter Bruch ist allemal kleiner als das Ganze, ein unächter aber entweder eben so groß als das Ganze oder noch größer.

§. 58.
Lehrsatz.

Wenn man das Dividendum so wohl als den Divisor durch einerley Zahl entweder multipliciret

oder dividiret, so wird der Quotient dadurch nicht geändert.

Beweis.

Es sey a das Dividendum, b der Divisor, so ist der Quotient $= \frac{a}{b}$. Man setze $\frac{a}{b} = q$, so ist $a = qb$ (§. 38. 40.). Ferner ist auch $an = qbn$, wenn n die Zahl bedeutet, durch welche das Dividendum und der Divisor multipliciret werden sollen (§. 40.), demnach ist auch $\frac{an}{bn} = q = \frac{a}{b}$ (§. 38. 40.)

Es ist ferner $a:n = bq:n = q(b:n)$ (§. 30. 40.) also auch $\frac{a:n}{b:n} = q = \frac{a}{b}$.

§. 59.

Zusatz.

Eine bestimmte Zahl mit angehängten Nullen wird durch 10, 100, 1000 u. s. dividiret, wenn man in derselben von der Rechten gegen die Linke eine, zwey oder mehrere Nullen weglöschet.

§. 60.

Zusatz.

Wenn demnach der Zähler eines Bruchs so wohl als der Nenner durch einerley dritte Zahl entweder multipliciret oder dividiret werden, so ändert sich der Werth des Bruchs nicht (§. 55. 58.).

§. 61.

§. 61.

Aufgabe.

Es besteht das Dividendum höchstens aus zwey Ziffern der Divisor aber aus einer, man soll den Quotienten finden.

Auflösung.

1. Fall. Ist der Divisor größer als die höchste Ziffer im Dividendo, so suche man in dem Einmal Eins eine Ziffer, welche mit dem Divisor multipliciret das Dividendum giebt. Findet man eine solche, so ist sie der ganze gefundene Quotient. Findet man aber keine solche, so nehme man wenigstens aus dem Einmal Eins eine Ziffer, welche mit dem Divisor multipliciret ein Produkt giebt, das dem Dividendo am nächsten kömmt, dieses subtrahire man alsdenn von dem Dividendo, und setze zu jener Ziffer einen Bruch, dessen Zähler der Rest, und der Nenner der Divisor ist. Die Ziffer und der Bruch zusammengenommen ist der verlangte Quotient z. E.

64 (8 Quot.
8
64

86 (9 $\frac{5}{9}$ Quot.
9
81
5

2. Fall. Ist der Divisor kleiner als die höchste Ziffer des Dividendi, so untersuche man, wie vielmal der Divisor in der höchsten Ziffer des Di-

videndi enthalten ist, setze zu der Zahl, welche dieses angiebt, eine o, multiciplire darauf den Divisor mit der Zahl und o, und subtrahire dieses Produkt von dem Dividendo. Sollte der Rest größer als der Divisor seyn, so dividire man abermals mit dem Divisor in den Rest, und addire diesen Quotienten zu den vorhin gefundenen, multiplicire abermals diesen letzten Quotienten mit dem Divisor, und subtrahire dieses Produkt von dem Reste. Bleibt auch hier ein Rest, so setze man noch zu den ganzen Quotienten einen Bruch, dessen Zähler dieser lezte Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. Z. E.

90	(40	
2	5	
80	45	Quot.
10		
0		

75	20	
3	4	
60	24	$\frac{3}{3}$ Quot.
14		
12		
(2)		

§. 62.

Zusatz.

Auf eben diese Art wird auch eine noch so grosse mit Ziffern geschriebene Zahl durch eine einfache Ziffer ohne Schwierigkeit dividiret werden können. Z. E.

463289 (51476 $\frac{5}{9}$ Quot.

9

45

13

9

42

36

68

63

59

51

(5)

§. 63.

Aufgabe.

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl durch eine andere zu dividiren.

Auflösung.

1. Fall. Wenn beyde Zahlen gleich viele Ziffern haben, so dividire man die höchste Ziffer des Divisors in die höchste Ziffer des Dividendi, und betrachte die übrigen Ziffern des Dividendi und des Divisors als Nullen. Nun multiplicire man den Quotienten mit dem ganzen Divisor; ist nun das Produkt so groß, als das Dividendum, so hat man den ganzen Quotienten gefunden. Ist aber das Produkt kleiner als das Dividendum, so subtrahire man es vom Dividendo; sollte alsdenn dieser Rest größer als der Divisor seyn, so muß man den angenommenen Quotienten um

Eins oder mehrere Einheiten vermehren, bis das Produkt des Quotienten mit dem Divisor von dem Dividendo subtrahiret einen Rest giebt, der kleiner als der Divisor ist, alsdenn setzt man zum gefundenen Quotienten noch einen Bruch, dessen Zähler der Rest und der Nenner der Divisor ist. Sollte aber endlich der Quotient mit dem Divisor multipliciret ein grösseres Produkt geben, als das Dividendum ist, so muß der angenommene Quotiente um Eins oder mehrere Einheiten vermindert werden; z. E.

6.4.2.38 | 2 $\frac{14960}{24639}$ Quot.
2 4 6 3 9

49278

14960

2. Fall. Hat das Dividendum eine Ziffer mehr als der Divisor, so untersuche man, ob die Ziffern des Dividendi die kleinste nicht mit gerechnet entweder größer oder kleiner als die Ziffern des Divisors sind. Im ersten Falle suche man nach §. 61. n. 2. und nach dem vorigen Falle den Quotienten. Ist aber das zweyte, so untersuche man, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in den beyden höchsten Ziffern des Dividendi enthalten sey. Alsdenn mache man die Probe wie beym ersten Falle. z. E.

43268 | 20 $\frac{8}{2163}$ Quot. 67284 | 483
2163 9543

43260 66801

8 (483)

3. Fall. Die Anzahl der Ziffern des Dividendi übertreffe die Anzahl der Ziffern des Divisors

um

um so viele als man will: so untersuche man, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten Ziffer oder beyden höchsten Ziffern des Dividendi enthalten sey, mache alsdenn wie beym ersten Falle die Probe. Nun subtrahire man das Produkt des Divisors mit der höchsten Ziffer des Quotienten von der gleichen Anzahl der höchsten Ziffern des Dividendi, setze zu diesen Reste die folgende Ziffer des Dividendi, und dividire abermals mit dem Divisor in diese Zahl. Sollte diese Zahl kleiner als der Divisor seyn, so wird die zweyte Ziffer des Quotienten eine 0; alsdenn nimmt man die folgende Ziffer des Dividendi wieder herunter, und fährt damit so lange fort, bis der Divisor der Zahl endweder gleich oder kleiner wird.

Dieses Verfahren wiederhole man so oft, bis entweder kein Rest oder ein Rest, der kleiner als der Divisor ist, übrig bleibe. z. E.

```
 562839642 (173128   514
  3251                3251
 ------
  2377.3
  22757
 ------ -
   10.169
    9753
 ------ -
     4166
     3251
 ------ -
      9154
      6502
 ------
     26522
     26008
 ------
      (514)
```

§. 64.

§. 64.

Aufgabe.

Es sind das Dividendum und der Divisor unbestimmte Zahlen, man soll den Quotienten finden.

Auflösung.

1. Fall. Sind das Dividendum und der Divisor einfache oder zusammengesetzte Zahlen, so zeige man blos den Quotienten durch das Zeichen der Division an z. E. $a : b = \frac{a}{b}$. Ferner $(a + b - c + d - e) : (g - h + m) = \frac{a + b - c + d - e}{g - h + m}$.

2. Fall. Ist das Dividendum eine zusammengesetzte Zahl der Divisor aber eine einfache Zahl, so dividire man alle Theile des Dividendi mit dem Divisor, und bringe alle einzelne Quotienten in eine Summe z E.

$$(a - b + c - d) : a = \frac{a}{a} - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - \frac{d}{a} = 1 \frac{-b + c - d}{a}.$$

3. Fall. Ist das Dividendum eine einfache der Divisor aber eine zusammengesetzte Zahl, so zeige man blos die Division an. Z. E. $a : (b - c + d - e) = \frac{a}{b - c + d - e}$.

4. Fall. Ist das Dividendum ein Produkt, und der Divisor ein Faktum von diesem Produkte, so streiche man den Faktor, der mit dem Divisor gleich

gleich ist, weg, der andere Faktor im Dividendo ist der Quotiente. Z. E. $\frac{ab}{a} = b$;

$\frac{-hgm}{hg} = -m$; $\frac{+abcd}{-ab} = cd.$

5. Fall. Sind das Dividendum und der Divisor zusammengesetzte Zahlen, deren Theile Produkte sind, so ordne man die Theile des Dividendi so, daß diejenigen zuerst auf einander folgen, welche mit dem ersten Theile des Divisors gemeinschaftliche Faktoren haben. Nun schreibe man den Divisor unter das Dividendum, und dividire den ersten Theil des Divisors in den ersten Theil des Dividendi, so erhält man den ersten Theil des Quotienten. Diesen Theil multiplicire man mit dem ganzen Divisor, und subtrahire das Produkt von dem Dividendo. Den Rest dividire man abermals mit dem Divisor, so ergiebt sich der zweyte Theil des Quotienten. Diesen multiplicire man wiederum mit dem ganzen Divisor, und subtrahire dieses Produkt von dem übrig gebliebenen Dividendo. Dieses Verfahren setze man fort, bis entweder zuletzt alles aufgehet, oder ein Divisor übrig bleibt, welcher durch den Rest nicht mehr dividiret werden kann, da alsdenn zu den gefundenen Quotienten ein Bruch gesetzet werden muß, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. z. E.

$cc + aa - bb \mid \frac{1}{2}c + \frac{aa - bb}{2c}$ — Quot.

$\frac{2c}{cc}$

$\frac{}{(aa - bb)}$

$\frac{aab}{}$

$$\frac{aab - bcd + bf}{b + bm} = \frac{(aa - cd + f)\,b}{(1 + m)\,b} =$$

$$\frac{aa - cd + f}{1 + m}.$$

$4aa - 6ac - 4ab + 8ad + 6bc - 8bd$ Quot. $2a - 3c + 4d$

$2a - 2b$

$4aa - 4ab$

$- 6ac + 8ad$

$2a - 2b$

$- 6ac + 6bc$

$+ 8ad - 8bd$

$2a - 2b$

$8ad - 8bd$

0.

§. 65.

Zusatz.

Die Division und Multiplikation dienen einander zur Probe: denn wenn man das Produkt durch einen Faktor dividiret, so muß der andere Faktor entstehen, und wenn man den Quotienten mit dem Divisor multipliciret, und zu diesem Produkte den Rest addiret, so muß das Dividendum kommen.

§. 66.

Aufgabe.

Verschiedene Brüche, welche gleiche Nenner haben, zu addiren.

Auflö-

Auflösung.

Man addire aller Zähler und setze unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner. Z. E.

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$$

Beweis.

Es ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = (a + c + d) : b =$

$\frac{a + c + d}{b}$ (§. 42.).

§. 67.

Aufgabe.

Einen kleinern Bruch von einem größern zu subtrahiren, wenn sie beyde gleiche Nenner haben.

Auflösung.

Man subtrahire den kleinern Zähler von dem größern, und gebe dieser Differenz den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner. Z. E. $\frac{8}{11} - \frac{4}{11} =$

$\frac{4}{11}$

Beweis.

Es ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = (a - c) : b = \frac{a - c}{b}$

(§. 42.) In dem Fall $c < a$, so wird die Differenz bejaht, sonst aber verneint.

§. 68.

§. 68.

Aufgabe.

Eine ganze Zahl in einen Bruch von gegebener Benennung zu verwandeln.

Auflösung.

Man multiciplire die ganze Zahl mit dem gegebenen Nenner, das Produkt ist der Zähler. z. E. 4 soll in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner = 3, so ergiebt sich $\frac{3 \cdot 4}{3} = 4$.

Beweis.

Es sey a eine ganze Zahl, welche in einen Bruch verwandelt werden soll, dessen Nenner = b, so hat man $a = \frac{a}{1}$. Multipliciret man nun Zähler und Nenner durch b, so entsteht $\frac{ab}{b} = \frac{a}{1}$ (§. 60.).

§. 69.

Erklärung.

Ein uneigentlicher Bruch ist entweder selbst eine ganze Zahl, oder er enthält eine ganze Zahl mit einem Bruche zugleich. Im letzten Falle heißt die Zahl eine vermischte Zahl.

§. 70.

Aufgabe.

Eine vermischte Zahl in einen unächten Bruch zu verwandeln.

Auf-

Auflösung.

Man multiplicire die ganze Zahl mit des Bruchs Nenner und addire hierzu den Zähler des Bruchs, die Summe ist der Zähler des unächten Bruchs, dessen Nenner der Nenner der gemischten Zahl ist z. E. $3\frac{4}{5} = \frac{19}{5}$.

§. 71.

Aufgabe.

Einen Bruch in einen andern von gegebener Benennung zu verwandeln.

Auflösung.

1. Fall. Kann der gegebene Nenner in den Nenner des Bruchs ohne Rest dividiret werden, so verrichte man die Division, und dividire mit diesem Quotienten den Zähler des Bruchs was herauskömmt, ist der neue Zähler z. E. $\frac{12}{18}$ wie viel sind es Drittel? Antw. $\frac{2}{3}$.
2. Fall. Kann der Nenner des gegebenen Bruchs in den neuen Nenner dividiret werden, so verrichte man die Division und multiplicire sodann mit dem Quotienten den Zähler des gegebenen Bruchs, das Produkt ist der neue Zähler. z. E. $\frac{3}{4}$, wie viel sind es Achtel? Antw. $\frac{6}{8}$.

§. 72.

Zusatz.

Bey dem Verfahren des ersten Falles kann es geschehen, daß der Quotient in dem Zähler des ge-

gebenen Bruchs nicht aufgehet, alsdenn erhält man gebrochene Brüche z. E. $\frac{5}{2}$ wie viel sind es Drittel? Antw. $2\frac{1}{3}$.

§. 73.

Erklärung.

Wenn eine ganze Zahl n in die ganze Zahl a, ohne daß ein Rest bleibt, dividiret werden kann, so heißt n das Maas von a, und wenn eben die Zahl in verschiedenen andern ganzen Zahlen a, b, c, d u. s. zugleich aufgeht, das gemeinschaftliche Maas aller dieser Zahlen.

§. 74.

Zusatz.

Wenn die ganze Zahl n die ganze Zahl a meßen soll, so muß a sich wenigstens in zwey Faktoren zerfällen lassen, deren einer durch n gemessen wird, oder es muß $n = a$ seyn. Wenn demnach mehrere ganze Zahlen durch die ganze Zahl n gemessen werden sollen, so müssen sie alle einen gemeinschaftlichen Faktor haben, von welchem n ein Maas ist.

§. 75.

Erklärung.

Zahlen, welche durch kein anderes Maas, als durch sich selbst, und durch die Einheit gemessen werden können, heißen absolute Primzahlen, welche aber ein Maas haben, zusammengesetzte Zahlen. Sind nun zwey oder mehrere Zahlen

so

so beschaffen, daß sie ein gemeinschaftliches Maas besitzen, so nennt man sie zusammengesetzte Zahlen unter sich, im entgegengesetzten Falle aber Primzahlen unter sich. Entstehen Primzahlen unter sich, wenn zusammengesetzte Zahlen unter sich durch ihr gemeinschaftliches Maas dividiret werden, so heißt alsdenn dieses Maas ihr gemeinschaftliches oder gemeines gröste Maas.

§. 76.

Zusatz.

Eine jede von den zusammengesetzten Zahlen unter sich läßt sich also in zwey Faktoren zerfällen, wovon einer dem gemeinschaftlichen grösten Maasse gleich, und die übrigen alle Primzahlen unter sich sind. So ist z. E. von 4, 6, 12, 14 das gemeinschaftliche gröste Maas 2 weil $4 = 2 . 2$, $6 = 2 . 3$; $12 = 2 . 6$; $14 = 2 . 7$. wo die Faktoren $2 =$ dem gemeinen grösten Maasse, die übrigen aber alle Primzahlen unter sich sind.

§. 77.

Erklärung.

Eine Zahl, welche durch zwey gemessen wird, heißt eine gerade Zahl, welche aber durch zwey dividiret Eins zum Reste läßt, eine ungerade Zahl. Jede gerade Zahl läßt sich durch $2n$ und jede ungerade durch $2n + 1$ ausdrucken.

§. 78.

Zusatz.

Jede absolute Primzahl ist eine ungerade Zahl,

wenn die Zahl 2 ausgenommen wird: aber nicht umgekehrt.

§. 79.

Aufgabe.

Das gemeine gröste Maas von zweyen gegebenen Zahlen zu finden.

Auflösung.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, bleibt kein Rest, so ist diese das gemeine gröste Maas. Bleibt aber ein Rest, so dividire man damit die kleinere Zahl, und wenn alles aufgeht, so ist dieser das gemeine gröste Maas. Bleibt aber auch hier ein Rest, so dividire man diesen Rest in den vorigen Rest u. s. bis entweder zulezt alles aufgeht, oder Eins zum Reste bleibet. Im ersten Falle ist der lezte Divisor das gemeine gröste Maas, im zweyten Falle aber sind die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich.

§. 80.

Zusaz.

Sucht man also vom Zähler und Nenner eines Bruchs das gemeinschaftliche gröste Maas, und dividiret damit Zähler und Nenner des Bruchs, so ist der Bruch durch seine kleinsten Zahlen ausgedruckt.

§. 81.

Zusaz.

Von mehr als zwey Zahlen findet man das gemeine gröste Maas, wenn man von der kleinsten

und

und nächstgrößern das gemeine gröste Maas, von diesem Maasse und von der dritten größern Zahl abermals das gröste Maas u. s. suchet.

§. 82.

Aufgabe.

Zwey oder mehrere Brüche von verschiedener Benennung in andere Brüche zu verwandeln, welche gleiche Nenner haben.

Auflösung.

Man suche das gemeine gröste Maas aller Nenner, dividire sie damit, und setze die Quotienten zur Seite an die Brüche. Darauf multiplicire man diese Quotienten nebst dem gemeinschaftlichen Maasse in einander. Dieses Produkt hat die Eigenschaft, daß alle Nenner der gegebenen Brüche darinn aufgehen, und deswegens der Generalnenner genennt wird. Nun dividire man alle Nenner in den Generalnenner, und multiplicire jedesmal mit dem Quotienten den Zähler des Bruchs, dessen Nenner in den Generalnenner dividiret worden; die Produkte sind die neuen Zähler, deren Nenner der Generalnenner ist. Sollten aber die Nenner kein gemeinschaftliches Maas haben, so muß man alle Nenner in einander multipliciren, da alsdenn dieses Produkt der Generalnenner ist. z. E.

	(2)	(2)	(24)		(20)		
$\frac{1}{4}$	2	1	6	6	$\frac{1}{2}$	15	15
$\frac{5}{6}$	3	3	4	20	$\frac{2}{3}$	10	20
$\frac{3}{8}$	4	2	3	9	$\frac{4}{5}$	6	24

§. 83.

Erklärung.

Brüche, deren Nenner die Zahl 10 oder ein Produkt aus der Zahl 10 mit sich selbst, welches allemal die Einheit mit einer Reihe daran gehängter Nullen ist, heißen Decimalbrüche, wie z. E. $\frac{134}{100}$. Man kann einen Decimalbruch also schreiben, daß man den Nenner ganz wegläßt, und im Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch ein Comma oder Punkt abschneidet, als Nullen der Nenner hat. So bedeutet $\frac{134}{100} = 1$, 34. Eben diese Bezeichnung kann bequem beybehalten werden, wenn gleich im Nenner mehr Nullen befindlich sind als der Zähler Ziffern hat. Man setzet nemlich zu den Ziffern des Zählers noch so viele Nullen von der Rechten gegen die Linke, daß die Nullen mit den Ziffern der Anzahl nach so viel betragen, als Nullen im Nenner befindlich sind, vorn an kommt aber noch eine Null mit einem Comma oder Punkt. So ist $\frac{5}{100} = 0,05$; $\frac{6}{10000} = 0,0006$ u. s.

§. 84.

Zusatz.

Läßt man den Nenner eines Decimalbruches weg, so steht das Comma oder der Punkt allemal bey der Ziffer, welche die Einer bedeutet. Die Ziffern aber, welche nach den Comma gegen die Rechte zu folgen, nehmen nach eben den Decimalgesetz ab, nach welchen die Ziffern von dem Orte der Einer gegen die Linke zu nehmen. So bedeutet jede Ziffer nach den Einern in der ersten Stelle Zehntheile, in der zweyten Hunderttheile u. s. von der Einheit. Es ist nemlich $13,4 = \frac{134}{10} = 13 \frac{4}{10} = 13 + \frac{4}{10}$; $0,05 = \frac{5}{100} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100}$ u. s. Man kann demnach die Ziffern eines Decimalbruches in Ziffern verschiedener abnehmender Decimalordnungen eintheilen. Die Ziffer nach dem Orte der Einer gehöret zur ersten, die zweyte zur zweyten, die dritte zur dritten u. s. abnehmenden Decimalordnung.

§. 85.

Aufgabe.

Verschiedene gegebene Brüche von ungleicher Benennung zu addiren.

Auflösung.

Man bringe die Brüche unter einerley Benennung, und addire alsdenn ihre Zähler, dieser Sum-

Summe gebe man den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner: z. E.

$\frac{3}{4}$	1	6	18
$\frac{5}{8}$	2	3	15
$\frac{5}{12}$	3	2	10
			43
			24

$1\frac{19}{24}$

(19)

Sind die Brüche Decimalbrüche, so setze man diejenigen Ziffern unter einander, welche zu einerley Decimalordnung gehören, darauf addire man wie bey ganzen Zahlen, und bezeichne in der Summe die Ziffer mit dem Zeichen der Einer, welche in der Columne der Einer zu stehen kommt. z. E.

56 32864
3,9682
13,62064

73,91748 Summe.

§. 86.

Zusatz.

Gemischte Zahlen werden zu einander addiret, wenn die Summe der Brüche zu der Summe der ganzen Zahlen addiret wird.

§. 87.

§. 87.

Aufgabe.

Es sind zwey Brüche von ungleicher Benennung gegeben, man soll den kleinern von dem grössern subtrahiren.

Auflösung.

Man bringe beyde Brüche auf einerley Benennung, und subtrahire sodann den Zähler des Subtraktors von dem Zähler des Subtrahendi, diese Differenz ist der neue Zähler dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner ist. z. E. $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$. Sind beyde Brüche Decimalbrüche, so schreibe man die Ziffern so unter einander wie bey der Addition, subtrahire wie bey ganzen Zahlen, und setze das Zeichen der Einer bey der Ziffer, welche in der Columne der Einer der gegebenen Zahlen zu stehen kommt. z. E.

56,3453
9,83264
46,51266 Differ.

§. 88.

Zusatz.

Die Differenz von zweyen gemischten Zahlen findet man, wenn man nicht allein die gebrochne sondern auch die ganze Zahl des Subtractors von dem Subtrahendo subtrahirt.

§. 89.

Aufgabe.

Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren.

1. Auflösung.

Man dividire die ganze Zahl in den Nenner des Bruchs, und lasse den Zähler ungeändert (§. 33. 37.) z. E. $\frac{5}{12} \times 6 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

2. Auflösung.

Geht die Division nicht auf, so multiplicire man den Zähler mit der ganzen Zahl, das Produkt ist der neue Zähler, dessen Nenner der Nenner des Bruchs ist. (§. 33.) z. E. $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Ist der Bruch ein Decimalbruch, so multiplicire man wie bey ganzen Zahlen, und gebe dem Produkte eben so viele Decimalstellen, als der Bruch hatte. z. E. 4,326 × 4 = 17,304.

§. 90.

Zusatz.

Einen Decimalbruch multipliciret man demnach mit einer Einheit, woran eine Reihe Nullen gehängt worden, wenn man das Comma von der Stelle der Einer im Multiplikando um so viele Stellen gegen die Rechte zuruckt, als im Multiplikator Nullen sind. Hätte aber das Multiplikandum nicht so viele Decimalstellen, als im Multiplikator Nul-

len

len sind, so muß man dem Multiplikando noch so viele Nullen beyfügen, bis die Anzahl der Ziffern und Nullen nach der Stelle der Einer so groß sind, als die Anzahl der Nullen im Multiplikator. So ist 0,0364 × 1000 = 36,4, und 0,432 × 10000 = 0,4320 × 10000 = 4320.

§. 91.

Aufgabe.

Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren.

1. Auflösung.

Man dividire die ganze Zahl in dem Zähler des Bruchs, und lasse den Nenner ungeändert (§. 35. 37.) z. E. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$.

2. Auflösung.

Geht die Division nicht auf so multiplicire man den Nenner mit der ganzen Zahl, und lasse den Zähler ungeändert. (§. 37.) Z. E. $\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Ist der Bruch ein Decimalbruch, so dividire man wie bey ganzen Zahlen, und gebe dem Quotienten eben so viel Decimalstellen, als der Bruch hat. Bleibt ein Rest, so setze man noch zum gefundenen Quotienten einen Bruch, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor mit eben so vielen Nullen ist, als der Quotient Decimalstellen hat. Z. E. 0,5643 : 3 = 0,1881.

§. 92.

Zusatz.

Einen Decimalbruch dividiret man also mit einer Einheit, woran eine Reihe Nullen gehängt worden, wenn man im Dividendo das Comma gegen die Linke so weit fortrückt, als im Divisor Nullen sind. Wären aber im Dividendo nicht so viele Ziffern, als der Divisor Nullen hat, so müßte man vor den Ziffern nach der Stelle der Einer noch so viele Nullen setzen, daß sie mit den Ziffern von der Stelle der Einer gerechnet der Anzahl nach so viel betragen, als im Divisor Nullen sind, im Quotienten müste man aber noch eine Null mit einem Comma voransetzen. So ist 34,256 : 10 = 3,4256 und 0,063 : 100 = 00,063 : 100 = 0,00063.

§. 93.

Erklärung.

Wenn eine Zahl durch $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ — — } \frac{1}{n}$ multipliciret werden soll, so sagt man, man soll die Zahl $\frac{1}{2}$ mal, $\frac{1}{3}$ mal — $\frac{1}{n}$ mal nehmen, folglich dieselbe durch 2, 3 — — n dividiren. Man findet also das Produkt einer Zahl mit einem Bruche dessen Zähler Eins ist, wenn man die Zahl so vielmal kleiner macht, als der Nenner des Bruchs anzeigt. Ein jeder anderer Bruch, dessen Zähler eine jede beliebige Zahl, ist so groß als ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, welche mit dem Zähler des

Bruchs

Bruchs multipliciret worden. Z. E. $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} \times 4$.
Demnach multipliciret man eine Zahl mit einem Bruch, wenn man sie durch den Nenner des Bruchs dividiret, und was herauskommt mit dem Zähler des Bruchs multipliciret. z. E. $15 \times \frac{3}{5} =$
$15 \times \frac{1}{5} \times 3 = \frac{15}{5} \times 3 = 3 \times 3 = 9$. Es heißt also eine Zahl mit einem Bruche multipliciren nicht anders, als

einen Theil von der Zahl, welchen der Nenner des Bruchs anzeigt, durch den Zähler desselben multipliciren.

§. 94.
Aufgabe.

Eine ganze Zahl durch einen Bruch zu multipliciren.

1. Auflösung.

Man dividire die Zahl durch des Bruchs Nenner, und multiplicire darauf diesen Quotienten mit des Bruchs Zähler. z. E. $24 \times \frac{5}{6} = (24 : 6)$
$5 = 20$.

2. Auflösung.

Man multiplicire die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und dividire dieses Produkt durch den Nenner. z. E. $7 \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5} = \frac{21}{5} =$
$4\frac{1}{5}$.

Beweis.

Es sey die ganze Zahl a durch $\frac{b}{c}$ zu multiplicieren, so hat man $(a:c)\,b = (ab):c$ (§. 93. 39.).

§. 95.

Zusatz.

Eine ganze Zahl und ein Bruch geben mit veränderter Ordnung einerley Produkt, demnach findet man das Faktum einer ganzen Zahl mit einem Decimalbruche vermöge des 89. §.

§. 96.

Aufgabe.

Einen Bruch durch einen Bruch zu multiplicieren.

1. Auflösung.

Man dividire des Multiplikandi Zähler durch des Multiplikators Nenner, und des Multiplikandi Nenner durch des Multiplikators Zähler, jener Quotient ist der Zähler, und dieser der Nenner des Produktes z. E. $\frac{6}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{9}$. Denn es ist

$\frac{6}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{18} : 3 \times 2$ (§. 93.) $= \frac{6:3}{18} \times 2$ (§. 91.) $= \frac{6:3}{18:2}$ (§. 89.).

2. Auflösung.

Man dividire des Multiplikandi Zähler mit des Multiplikators Nenner, und multiplicire diesen Quotienten mit dem Zähler des Multiplikators, das Produkt ist der neue Zähler, dessen Nenner der Nenner des Multiplikandi ist. z. E. $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} =$

$\frac{6:3 \times 2}{7} = \frac{4}{7}$. Denn $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{7} : 3 \times 2$

$= \frac{6:3}{7} \times 2 = \frac{6:3 \times 2}{7}$.

3. Auflösung.

Man dividire des Multiplikandi Nenner mit dem Zähler des Multiplikators, und multiplicire diesen Quotienten mit des Multiplikators Nenner, dieses Produkt ist der neue Nenner, welcher zum Zähler den Zähler des Multiplikandi erhält. z. E.

$\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{8:4 \times 5} = \frac{3}{10}$. Denn $\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} =$

$\frac{3}{8} : 5 \times 4 = \frac{3}{8 \times 5} \times 4 = \frac{3}{8 \times 5 : 4} =$

$\frac{3}{8:4 \times 5}$.

4. Auflösung.

In allen Fällen kann man sowohl den Zähler des Multiplikandi mit dem Zähler des Multiplikators als auch den Nenner des Multiplikandi mit

dem Nenner des Multiplikators multipliciren, da alsdenn das erste Produkt der neue Zähler und das andere der neue Nenner ist. z. E. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$.

Denn $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4} : 6 \times 5 = \frac{3}{4 \times 6} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4 \times 6}$.

5. Auflösung.

Sind die Brüche Decimalbrüche, so multiplicire man sie in einander, wie bey ganzen Zahlen, gebe alsdenn diesem Produkte so viel Decimalstellen, als beyde Brüche zusammen haben z. E.

0,432 × 0,032

32

864

1296

0,013824 Prod.

Denn es ist $0{,}432 = \frac{432}{1000}$ und $0{,}032 = \frac{32}{1000}$

mithin $0{,}432 \times 0{,}032 = \frac{432}{1000} \times \frac{32}{1000} = \frac{432 \times 32}{1000 \times 1000} = \frac{13824}{1000000} = 0{,}013824$.

§. 97.

Zusatz.

Zwey oder mehrere Brüche geben mit veränder-

ter

ter Ordnung einerley Produkt. Es ist z. E. $\frac{3}{4} \times$

$\frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

§. 98.

Zusatz.

Wenn man zwey Decimalbrüche in einander zu multipliciren hat, so ist es oft nicht nöthig, alle Decimalstellen zu suchen. Man fängt alsdenn mit der höchsten Ziffer des Multiplikators zu multipliciren an, und fährt damit fort bis zur niedrigsten, bey der Multiplikation einer jeden folgenden Ziffer aber läßt man eine Ziffer zur Rechten im Multiplikando weg, und multipliciret nicht weiter, als bis zur Columne der niedrigsten Ziffer desselben. z. E.

0,63428
0,54326
---
0 00800
31214
0426
211
089
11
02
13

0,34455 Prod.

Dieses Verfahren nennt man die abgekürzte Multiplikation mit Decimalbrüchen.

§. 99.

Erklärung.

Wenn eine Zahl durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ — — $\frac{1}{n}$ dividiret werden soll, so sagt man, man soll eine Zahl suchen, welche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{n}$ mal genommen der Zahl gleich wird, also soll man eine Zahl finden, welche so vielmal größer ist, als der Nenner des Bruchs anzeigt. Mithin dividiret man eine Zahl durch einen Bruch, dessen Zähler Eins, wenn man die Zahl durch den Nenner des Bruchs multipliciret. Ist aber der Zähler des Bruchs eine jede beliebige Zahl, so wird ebenfalls eine Zahl verlangt, welche mit dem Bruch multipliciret das Dividendum giebt. Demnach muß man die Zahl durch den Nenner des Bruchs multipliciren, und dieses Produkt durch den Zähler dividiren. Es heißt also eine Zahl durch einen Bruch dividiren

ein vielfaches von der Zahl nehmen, welches der Nenner des Bruchs anzeigt, und dieses durch den Zähler des Bruchs dividiren.

§. 100.

Aufgabe.

Eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren.

1. Auflösung.

Man multiplicire die ganze Zahl mit des Bruchs Nenner und dividire dieses Produkt durch des Bruchs Zähler z. E. $36 : \frac{5}{6} = 216 : 5 = 43\frac{1}{5}$.

2. Auflösung.

Man dividire den Zähler des Bruchs in die ganze Zahl und multiplicire den Quotienten durch den Nenner des Bruchs z. E. $24 : \frac{6}{7} = 4 \times 7 = 28$.

Beweis.

Es sey die ganze Zahl a durch den Bruch $\frac{b}{c}$ zu dividiren, so hat man $(a \times e) : b = (a : b) \times e$ (§. 99. 39.).

§. 101.

Aufgabe.

Einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren.

1. Auflösung.

Man dividire den Zähler des Divisors in den Zähler des Dividendi, und den Nenner des Divisors in den Nenner des Dividendi. Jener Quotient ist der neue Zähler, und dieser der neue Nenner z. E. $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Denn $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \times 3 : 2$ (§. 99.) $= \frac{4}{9 : 3} : 2$ (§. 89.) $= \frac{4 : 2}{9 : 3}$ (§. 91.).

2. Auflösung.

Man dividire den Zähler der Divisors in den Zähler des Dividendi, und multiplicire diesen Quotienten mit dem Nenner des Divisors, das Produkt ist der neue Zähler, dessen Nenner der Nenner des Dividendi ist z. E. $\frac{8}{11} : \frac{4}{5} = \frac{2 \times 5}{11} = \frac{10}{11}$.

Denn $\frac{8}{11} : \frac{4}{5} = \frac{8}{11} \times 5 : 4 = \frac{8 \times 5}{11} : 4 = \frac{8 \times 5 : 4}{11} = \frac{8 : 4 \times 5}{11}$.

3. Auflösung.

Man dividire des Dividendi Nenner durch des Divisors Nenner, und multiplicire diesen Quotienten mit des Divisors Zähler, das Produkt ist der neue Nenner, welcher zum Zähler den Zähler des Dividendi erhält. Z. E. $\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$. Denn $\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \times 4 : 3 = \frac{5}{8:4} : 3 = \frac{5}{8:4 \times 3}$.

4. Auflösung.

Man multiplicire in allen Fällen des Dividendi Zähler mit des Divisors Nenner, und des Dividendi Nenner mit des Divisors Zähler. Jenes Produkt ist der neue Zähler und dieses der neue Nenner. Z. E. $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$. Denn $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times 6 : 5 = \frac{3 \times 6}{4} : 5 = \frac{3 \times 6}{4 \times 5}$.

5. Auflösung.

Sind die Brüche Decimalbrüche, so dividire man wie bey ganzen Zahlen, und gebe dem Quotienten so viele Decimalstellen, als entstehen, wenn man die Anzahl der Decimalstellen des Divisors von der Anzahl der Decimalstellen des Dividendi subtrahiret. Sollte bey der Division ein Rest bleiben, so muß man noch zum gefundenen Quotienten einen Bruch setzen, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor ist, welcher mit der Einheit, an der so viel Nullen hängen, als der Quotient Decimalstellen hat, multipliciret worden z. E.

$$0{,}0643 : 5{,}02 = 643 \mid 0{,}01\tfrac{141}{502}$$
$$502 \mid$$
$$(141)$$

Wenn der Divisor mehr Decimalstellen besitzet, als das Dividendum, so kann man dem Dividendo Nullen beyfügen, und eben so wie vorhin dividiren. Auf die nemliche Art würde man auch dem Reste nach und nach eine Null beyfügen können, und den Quotienten so genau suchen, als man wollte. In manchen Fällen findet man den Quotienten völlig, in den mehresten aber so weit man will.

§. 102.

Zusatz.

Eine ganze Zahl wird durch einen Decimalbruch dividiret, wenn man der ganzen Zahl so viele Nullen beyfüget, als man will, und nunmehr wie vorhin dividiret, alsdenn dem Quotienten so viele Decimalstellen giebt, als die Anzahl der Nullen weniger der Anzahl der Decimalstellen des Divisors anzeigt.

§. 103.

Aufgabe.

Einen Bruch in einen eben so großen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

Man setze an den Zähler so viele Nullen als man will, dividire alsdenn mit dem Nenner des Bruchs, gebe dem Quotienten so viele Decimalstellen,

stellen, als dem Zähler Nullen beygefüget sind, und setze, wenn ein Rest bleiben sollte, zum Quotienten noch einen Bruch, dessen Zähler der Rest und dessen Nenner der Divisor ist mit eben so vielen Nullen, als der Quotient Decimalstellen hat. Z. E.

$\frac{3}{4} = 3,00 | 0,75$

4

28

20

20

0

§. 104.

Zusatz.

Gemischte Zahlen und unächte Brüche laßen sich auf eben diese Art in Decimalbrüche verwandeln.

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen und Wurzeln und insbesondere von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln aus gegebenen Zahlen.

§. 105.

Erklärung.

Ein Produkt aus gleichen Faktoren wird eine Potenz, Dignität, Poreſtät, und ein jeder von den gleichen Faktoren, welche in einander multipliciret die Potenz geben, die Wurzel der Potenz genennt. Die erste Potenz ist mit der Wurzel einerley, die zweyte heißt das Quadrat, die dritte der Cubus oder Würfel.

Um

Um eine Potenz anzuzeigen schreibt man oberwärts der Wurzel zur Rechten eine kleine Ziffer, welche angiebt, aus wie viel gleichen Faktoren das Produkt bestehen soll, und welche der Exponent oder Index genennet wird. So ist $4^2 = 16$ das Quadrat, $4^3 = 64$ der Cubus von 4 und a^2 das Quadrat und a^3 der Cubus von a u. s. f.

§. 106.

Grundsätze.

Gleiche Zahlen zu einerley Potenz erhoben geben gleiche Potenzen, ungleiche Zahlen aber zu einerley Potenz erhaben ungleiche Potenzen. So ist $3^3 = 3^3$, und $4^3 > 2^3$.

§. 107.

Zusatz.

Die Potenz einer ganzen Zahl ist allemal eine ganze Zahl, die Potenz eines Bruchs aber ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Potenzen von dem Zähler und Nenner des Bruchs sind.

§. 108.

Erklärung.

Aus einer gegebenen Zahl die Wurzel ziehen heißt eine Zahl finden, welche zur so vielten Potenz erhoben, als der Exponent anzeigt, ein Produkt giebt, welches der Zahl gleich ist. Für die Wurzeln aller Potenzen bedienet man sich des Zeichens ($\sqrt{}$), und schreibt darüber eine kleine Ziffer, welche angiebt, aus welcher Potenz die Wur-

zel der hinter diesen Zeichen stehenden Zahl gezogen werden soll, und welche der Wurzelexponent genennet wird. So bedeutet $\sqrt{a}$ die Quadratwurzel, $\sqrt[3]{a}$ die Cubikwurzel und $\sqrt[n]{a}$ die Wurzel aus der nten Potenz von a.

§. 109.

Zusatz.

Die nten Wurzeln aus gleichen Zahlen sind gleich groß, und die nte Wurzel einer größern Zahl ist großer als die nte Wurzel einer kleinern Zahl. Auch ist die Wurzel aus einem Bruche ebenfalls ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Wurzeln aus dem Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs sind.

§. 110.

Lehrsatz.

Die Potenz eines Produktes ist ein Produkt aus den Potenzen der Faktoren.

Beweis.

Es sey $A = abc$ so ist $A^2 = abc.abc = a^2 b^2 c^2$ und überhaupt $A^n = a^n b^n c^n$, wo a, b und c auch Brüche bedeuten können.

§. 111.

Zusatz.

Ist $A^n = abc$, so ist auch umgekehrt $A = \sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$, es mögen a, b, c ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

§. 112.

Aufgabe.

Potenzen, welche gleiche Wurzeln haben, in einander zu multipliciren.

Auflösung.

Man addire die Exponenten, die Summe derselben ist der Exponent des Produktes mit eben der Wurzel, z. E. $a^5 \times a^3 = a^8$.

Beweis.

Es ist $a^5 = aaaaa$ und $a^3 = aaa$ mithin $a^5 \times a^3 = aaaaa.aaa = a^8$, also überhaupt $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

§. 113.

Aufgabe.

Potenzen, welche gleiche Wurzeln haben, in einander zu dividiren.

Auflösung.

Man subtrahire den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendi, die Differenz ist der Exponent des Quotienten mit eben der Wurzel, z. E. $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$.

Beweis.

Es ist $a^5 = aaaaa$ und $a^3 = aaa$, mithin $a^5 : a^3 = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$, also überhaupt $a^n : a^m = a^{n-m}$.

§. 114.

Zusatz.

Ist der Exponent des Divisors dem Exponenten des Dividendi gleich, so wird der Quotient allemal Eins. Ist aber der Exponent des Divisors größer als der Exponent des Dividendi, so wird der Exponent des Quotienten negativ. Es ist nemlich $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$. Weil nun $a^3 = 1.aaa$. und $a^5 = aaaaa$, mithin $a^3 : a^5 = \frac{1.aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$.

§. 115.

Lehrsatz.

Wenn der Exponent einer Potenz durch eine Zahl multipliciret wird, so wird die ganze Potenz zu einer andern Potenz erhoben, welche der Multiplikator anzeigt.

Beweis.

Es sey a^n die Potenz, deren Exponent n durch m multipliciret wird, so hat man $a^{m \times n}$. ein Produkt aus so vielen a^n als m Einheiten hat, mithin $= (a^n)^m$.

§. 116.

Lehrsatz.

Wird der Exponent einer Potenz durch eine ganze Zahl dividiret, so ist es eben so viel, als ob

man

man aus der Potenz die Wurzel gezogen hätte, welche die ganze Zahl anzeigt.

Beweis.

Es sey a^6 die Potenz deren Exponent 6 durch die Zahl 3 dividiret werden soll, so hat man $a^{6:3} = a^2$. Es ist aber $a^6 = aa.aa.aa$ und die Cubikwurzel davon $= aa = a^2$. mithin ist $a^{6:3} = \sqrt[3]{a^6}$, also überhaupt $a^{m:n} = \sqrt[m]{a^n}$.

§. 117.

Zusatz.

Umgekehrt muß also auch $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ u. s. seyn. Eben so wird auch $\sqrt[n]{abc} = (abc)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}}.c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$ u. s. seyn.

§. 118.

Lehrsatz.

Wenn sich der uneigentliche Bruch $\frac{a}{b}$. auf keine ganze Zahl bringen läßt, so ist jede Potenz deßelben ein Bruch von eben der Art.

Beweis

Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist entweder durch seine kleinsten Zahlen ausgedruckt, oder nicht. Ist jenes, so sey a aus den einfachen Faktoren $\alpha, \beta, \gamma - \pi$ und b aus den einfachen Faktoren h, g, i — p zusammengesezt, so kann keiner von den Faktoren des a

durch

durch einen der Faktoren des b gemeßen werden. Man erhebe nun $\frac{a}{b}$ in die nte Potenz, so enthält a^n jeden Faktor von a nmal, so wie b^n jeden Faktor von b ebenfalls nmal enthält (§. 110.). Demnach kann weder der Zähler noch der Nenner gemeinschaftliche Faktoren haben, und der Bruch keine gauze Zahl seyn.

Ist aber der Bruch nicht in seine kleinsten Zahken ausgedruckt, so sey m das gemeinschaftliche Maas vom Zähler und Nenner, und $\frac{a}{m} = p$ und $\frac{b}{m} = q$, also $a = mp$ und $b = mq$ (§. 38. 40.), mithin $\frac{a}{b} = \frac{mp}{mq}$. Nun ist $\frac{a^n}{b^n} = \frac{m^n p^n}{m^n q^n} = \frac{p^n}{q^n}$. Wäre nun $\frac{p^n}{q^n}$ eine ganze Zahl, so müßte auch $\frac{a^n}{b^n}$ eine ganze Zahl seyn wider den vorigen Beweis.

§. 119.

Lehrsatz.

Wenn die nte Wurzel aus einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so kann sie auch kein Bruch seyn, wovon Zähler und Nenner bestimmte Zahlen wären.

Beweis.

Wäre die Wurzel ein ächter Bruch in bestimmten Zahlen, so müßte die Zahl selbst ein solcher Bruch seyn (§. 107.). Wäre aber die Wurzel ein unächter Bruch, der sich nicht auf eine ganze

Zahl

Zahl bringen ließe, so müßte die Zahl ein Bruch von eben der Art also wiederum keine ganze Zahl seyn (§. 118.).

§. 120.

Erklärung.

Eine Zahl, die sich bestimmt angeben läßt, heißt eine **rationale** Zahl, diejenige aber, die sich nicht bestimmt angeben läßt, man mag noch einen so kleinen Theil der Einheit annehmen, eine **irrationale Zahle**

§. 121.

Zusatz.

Wurzeln aus ganzen Zahlen, welche keine ganze Zahlen sind, müßen irrationale Zahlen seyn.

§. 122.

Erklärung.

Ganze Zahlen, deren Wurzeln ganze Zahlen sind, heißen **vollkommene Potenzen**, im entgegengesetzten Fall aber **unvollkommene Potenzen**. Die vollkommenen Quadrat- und Cubikzahlen einfacher Zahlen kommen in dem Einmaleins vor, und sie sind folgende:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadraten	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 123.

Zusatz.

Die Quadratzahl einer einfacher Ziffer bestehet höchstens aus zwey, und die Cubikzahl einer solchen Ziffer höchsiens aus drey Ziffern.

§. 124.

Zusatz.

Ein Produkt aus zwey einfachen Ziffern, mithin auch ein Quadrat einer einfachen Ziffer 2. bis 9mal genommen kann nicht über drey Ziffern haben. Eben so kann auch die Anzahl der Ziffern eines Produktes aus dem Quadrate einer einfachen Ziffer mit einer einfachen Ziffer 2 bis 9mal genommen nicht über vier steigen.

§. 125.

Erklärung.

Wenn eine Ziffer in eine Potenz der Zahl 10 multipliciret werden soll, so pflegt man der Bequemlichkeit wegen die Potenz der Zahl 10 wegzulaßen, und schreibt über die Ziffer eine etwas kleinere Ziffer, welche mit dem Exponenten der Potenz einerley ist, und welche folglich anzeigt, zu welcher Decimalordnung die darunter stehende Ziffer gehöret. Eine solche Ziffer pflegt man den Exponenten, Index oder eine Ziffer der Ordnung zu nennen. Z. E. $400 = 4 \times 10^2 = \frac{1}{4}$, ferner $0{,}05 = 0 + \frac{0}{10^1} + \frac{5}{100} = 0.10^0 + 0.10^{-1} + 5.10^{-2} = 5$. Die Exponenten der Ordnung sind demnach

noch bejahend, wenn die Zahlen zur wachsenden, und verneinend, wenn sie zur abnehmenden Decimalordnung gehören.

§. 126.

Zusatz.

Eine jede ganze Zahl und ein Decimalbruch läßt sich so ausdrucken, daß man über die Ziffern die Exponenten der Ordnung schreibt. So bedeutet z. E. $56324 = 5.10^4 + 6.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 4.10^0 = 56324$. Eben so ist $0,63 = 6.10^{-1} + 3.10^{-2} = 0,^{-1}_{6}{}^{-2}_{3}$.

§. 127.

Lehrsatz.

Wenn zwey Ziffern von verschiedenen Decimalordnungen in einander multipliciret werden so ist der Exponent der Ordnung der niedrigsten Ziffer des Produktes die Summe der Exponenten der Faktoren.

Beweis.

Es sey a die eine Ziffer von der Ordnung $+ m$, und b die andere von der Ordnung $+ n$, so ist $ab = a.10^m + b.10^n = ab.10^{m+n} = a^{m+n}b$ (§. 125. 112). Ist a von der Ordnung $- m$, so ist das Produkt $a^{-}b^{m+n}$. Wenn $- m < n$ so ist das Produkt eine ganze Zahl, wenn aber $- m > + n$ so ist das Produkt ein Decimalbruch. Wäre endlich auch b von der Ordnung $- n$, so wird das Produkt $a^{-m}\times^{-n}b = a^{-(m+n)}b$.

§. 128.

Zusatz.

Das Quadrat einer Ziffer von der Ordnung m muß demnach von der Ordnung 2m, und die Cubikzahl von der Ordnung 3m seyn d. h. das Quadrat der Ziffer muß doppelt so viele Nullen, und der Cubus dreymal so viele Nullen besitzen als die Wurzel hat. Demnach ist auch umgekehrt die Quadratwurzel eines Quadrats einer Ziffer von der Ordnung 2m von der Ordnung m und die Cubikwurzel eines Würfels einer Ziffer von der Ordnung 3m von der Ordnung m d. h. die Quadradwurzel ist die Wurzel der Ziffern des Quadrats mit halb so vielen und die Cubikwurzel die Wurzel der Ziffern des Würfels mit $\frac{1}{3}$mal so vielen Nullen, als das Quadrat und der Cubus.

§. 129.

Lehrsatz.

Wenn zwey Ziffern von verschiedener Ordnung in einander dividiret werden, so ist der Exponent der niedrigsten Ziffer des Quotienten die Differenz des Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendi.

Beweis.

Es sey das Dividendum a von der Ordnung $+m$ und b der Divisor von der Ordnung $+n$, so hat man $a^{+m} : b^{+n} = a.10^m : b.10^n = \frac{a.10^m}{b.10^n} = \frac{a}{b}10^{m-n}$ (§. 113.) $= a^{m-n}$. Wäre a von der Ordnung

Ordnung $= m$, so wird $\frac{a}{b} \cdot 10^{-m-n} = \frac{a}{b}$ $^{-(m+n)}$.

Ist endlich auch b von der Ordnung $= n$, so wird

$$\frac{a}{b} \cdot 10^{-m+n} = \frac{a}{b}$$ $^{-(m-n)}$.

§. 130.

Lehrsatz.

Das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel enthält die Quadrate beyder Theile, und das gedoppelte Produkt aus dem einen Theil in den andern.

Beweis

Es sey $a + b$ die zweytheilige Wurzel, so hat man

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \end{array}$$

§. 131.

Zusatz.

Hätte man das unvollkommene Quadrat $a^2 + pa$ gefunden, so würde hier $p = 2b$ und $\frac{1}{2} p = b$, also $\frac{1}{4} p^2 = b^2$ seyn müßen, als denn wäre das unvollkommene Quadrat $a^2 + pa$ durch Zusetzung von $\frac{1}{4} p^2$ vollkommen, und man erhielt $a^2 + pa + \frac{1}{4} p^2$. Es sey z. E. $a = 3$, $p = 4$ also $a^2 + pa = 9 + 4.3$, und $a^2 + pa + \frac{1}{4} p^2 = 9 + 12 + 4 = 25$, wovon die Quadratwurzel 5 (§. 122.).

§. 132.

Zusatz.

Es sey a ein Zehner und b ein Einer, die Ziffer des Zehners α und des Einers β, so giebt dies $(\alpha.\ 10 + \beta.\ 1)^2 = \alpha^2.\ 100 + 2\alpha\beta.\ 10 + \beta^2.\ 1$, d. h. die niedrigste Ziffer vom Quadrate des ersten Theils der Wurzel fängt sich in der Stelle der Hunderter an, und kann höchstens bis in die Stelle der Tausender gehen (§. 123.); die niedrigste Ziffer des gedoppelten Produktes aus dem ersten Theile in dem zweyten fängt sich in der Stelle der Zehner an, und geht höchstens bis in die Stelle der Tausender; und die niedrigste Ziffer des Quadrats des zweyten Theils fängt in der Stelle der Einer an, und geht höchstens bis in die Stelle der Zehner (§. 124. 123.) Es sey z. E. $\alpha = 5$ und $\beta = 6$, so ist

$$\begin{array}{rl} \beta^2.1 = & 36 \\ 2\alpha\beta.\ 10 = & 60 \\ \alpha^2.\ 100 = & 25 \\ \hline 56^2 = & 3136 \end{array}$$

§. 133.

Zusatz.

Das Quadrat einer Zahl, welche aus zwey Ziffern besteht, hat nicht mehr als vier aber auch nicht weniger als drey Ziffern, also besteht das Quadrat einer mit zweyen Ziffern geschriebenen Zahl entweder aus doppelt so vielen Ziffern oder aus doppelt so

vielen

vielen Ziffern weniger eine. Theilt man daher eine aus drey oder vier Ziffern geschriebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Claßen, und giebt jeder Claße zwey Ziffern, so kann die Wurzel nicht mehr als zwey Ziffern haben.

§. 134.

Zusatz.

Es sey $a = m + n + o + p + \text{---}$ und $x = b$, so ist $a^2 = m^2 + 2mn + n^2 + 2(m+n)o + o^2(m+n+o)p + p^2 + \text{---}$; $2ab = 2(m+n+o+p+\text{---})x$ und $b^2 = x^2$ d. h. das Quadrat einer vieltheiligen Wurzel enthält die Quadrate aller Theile und die gedoppelten Produkte aus der Summe aller ersten Theile in dem nächstfolgenden.

§. 135.

Zusatz.

Eine jede vollkommene Quadratzahl hat höchstens doppelt so viele Ziffern, und wenigstens doppelt so viele weniger eine als die Wurzel hat. Theilt man daher eine Zahl sie mag aus so vielen Ziffern bestehen als man will von der Rechten gegen die Linke in Claßen, und giebt jeder Claße zwey Ziffern, so besteht die Quadratwurzel aus so vielen Ziffern, als Claßen gemacht worden.

§. 136.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung.

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Claßen und gebe jeder Claße zwey Ziffern

2. Suche man nach den 122. §. eine Ziffer, deren Quadrat den Ziffern der höchsten Claße entweder gleich oder nächstkleiner ist, diese ist die höchste Ziffer der zu suchenden Quadratwurzel:

3. Das Quadrat dieses ersten gefundenen Theils der Wurzel subtrahire man von den Ziffern der höchsten Claße und setze zu diesem Reste die folgende Claße der gegebenen Zahl.

4. Nun nehme man den ersten gefundenen Theil der Wurzel zweymal, und setze dieses gedoppelte unter die höchste Ziffer der heruntergenommenen Claße, und dividire damit in die darüber stehende Zahl, der Quotiente kann der zweyte Theil der Wurzel seyn. Um sich nun hiervon zu versichern, so multiplicire man

5. diesen Quotienten mit dem gedoppelt genommenen ersten Theile der Wurzel, und schreibe dieses Produkt unter das doppelte.

6. Noch

6. Noch nehme man das Quadrat des Quotienten, und setze die niedrigste Ziffer desselben unter die niedrigste Ziffer der herunter genommenen Claße, und addire es zu den n. 5. gefundenen Produkte. Ist nun diese Summe so groß als der Rest der ersten und zweyten Claße zusammengenommen, so ist der angenommen Quotient der zweyte Theil der Wurzel. Wäre aber die Summe größer, so müßte man den Quotienten um Eins oder mehre Einheiten vermindern. Sollte endlich diese Summe kleiner seyn, so muß man dieselbe von dem Reste der ersten Claße und der zweyten Claße zusammengenommen subirahiren. In dem Falle nun, da die gegebene Zahl aus dreyen oder höchstens vier Ziffern bestehet, hat man die Wurzel entweder genau oder wenigstens so weit gefunden, daß sie um keine Einheit größer mehr seyn kann. Enthält aber die gegebene Zahl mehrere Ziffern als viere, so setze man zur Differenz voriger Summe und des Restes der ersten und der zweyten Claße zusammengenommen die dritte Claße.

7 Nun nehme man die beyden ersten gefundenen Theile der Wurzel als den ersten an, und suche nach n. 4. 5. und 6. den folgenden Theil der Wurzel. Ueberhaupt laßen sich die schon gefundenen Theile der Wurzel als den ersten betrachten, da alsdenn die folgenden nach eben den Regeln zu finden sind (§. 132. 134.). Z. E.

12|96 (a b
3 6

$a^2 = 9$

$2ab + b^2 = 396$

$2a = 6$

$2ab = 36$

$b^2 = 36$

$2ab + b^2 = 396$

0

18|71|42|76 (a b b b
4 3 2 6

$a^2 = 16$

271

$2a = 8$

$2ab = 24$

$a^2 = 9$

2249

2242

$a2 = 86$

$2ab = 172$

$b^2 = 4$

1724

51876

$2a = 864$

$2ab = 5184$

$b^2 = 36$

$2ab + b^2 = 51876$

0

§. 137.

Zusatz.

Der Rest, der bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einer unvollkommenen Quadratzahl übrig bleibt, muß kleiner seyn, als die schon gefundene Wurzel zweymal genommen um Eins vermehrt.

§. 138.
Zusatz.

Die Quadratwurzel aus einem Bruche findet man wenn man die Quadratwurzel so wohl aus dem Zähler als Nenner ziehet.

§. 139.
Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen Quadratzahl die Wurzel durch Näherung zu finden.

Auflösung.

Man setze nach der Stelle der Einer Paare von Nullen, und betrachte die Zahl als eine ganze Zahl, gebe aber der Wurzel halb so viel Decimalstellen, als Paare von Nullen der gegebenen Zahl beygefüget werden. Auch könnte man jedesmal zum Reste ein Paar Nullen zusetzen, und dadurch die Wurzel so weit finden, als man will. Z. E.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142$$

1
100
2
96
400
281
11900
282
11296
60400
2828
56564
3836 u. s. f.

Probe

1,4142
14142
28284
56568
14142
14142
56568
14142
1,99996164
3836
2,00000000

§. 140.

Zusatz.

Die Quadratwurzel aus einem Decimalbruche findet man, wenn die Anzahl der Decimalstellen gerade (welches allemal durch Beyfügung einer Null zu wege gebracht werden kann), den wenn man Bruch als eine ganze Zahl ansiehet, der gefundenen Wurzel aber halb so viele Decimalstellen giebt. So ist

$$\sqrt{0,346} = \frac{\sqrt{3460}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{3460}}{100}$$

§. 141.

Zusatz.

Die Quadratwurzel zusammengesetzter Zahlen kann man auch dadurch finden, daß man sie in ihre Faktoren zerfället, und die Wurzeln derselben in einander multipliciret. So ist z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{6} = \sqrt{3}.\sqrt{2}$. Uebrigens kann man

einen

einen jeden Bruch so verändern, daß die Quadratwurzel des Nenners rational wird. Es ist nemlich allemal $V\frac{a}{b} = V\frac{ab}{bb} = V\frac{ab}{b}$, also auch $V\frac{1}{2} = V\frac{2}{4} = \frac{V2}{2}$; $V\frac{3}{4} = \frac{V3}{2}$; $V\frac{2}{3} = V\frac{6}{9} = \frac{V6}{3}$ u. s.

§. 142.

Lehrsatz.

Die Cubikzahl einer zweytheiligen Wurzel enthält die Cubikzahlen beyder Theile und die dreyfachen Produkte der Quadrate beyder Theile in beyde Theile.

Beweis.

Es sey $a + b$ die zweytheilige Wurzel, so ergiebt sich,

$$(a+b)^3 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\underline{\qquad\qquad a+b}$$
$$a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$\underline{a^3 + 2a^2b + ab^2}$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

§. 143.

Zusatz.

Es sey a ein Zehner, und die Ziffer des Zehners $= \alpha$; b ein Einer, und die Ziffer des Einers $= \beta$, so hat man $(\alpha.10 + \beta.1)^3 = \alpha^3.1000 + 3\alpha^2\beta.100 + 3\alpha\beta^2.10 + \beta^3.1$. d. h. die niedrigste Ziffer von dem Würfel des ersten Theils der Wurzel fängt sich in der Stelle der Tausender an, und kann bis in die Stelle der Hunderttausender

gehen (§. 123.); das dreyfache Produkt aus dem Quadrate des ersten Theils in dem zweyten fängt in der Stelle der Hunderter an, und kann bis in die Stelle der Hunderttausender gehen (§. 124.); das dreyfache Produkt aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten Theils hebt sich in der Stelle der Zehner an, und kann sich bis in die Stelle der Zehntausender erstrecken; die Cubikzahl des zweyten Theils fängt sich in der Stelle der Einer an und kann bis in die Stelle der Tausender gehen. Es sey. z. E. $\alpha = 9$ und $\beta = 8$, so ist

$$\beta^3 . 1 = 512$$
$$3\alpha\beta^2 . 10 = 1728$$
$$3\alpha^2\beta . 100 = 2044$$
$$\alpha^3 . 1000 = 729$$
$$98^3 = 951192$$

§. 144.

Zusak.

Wenn also eine Zahl, die aus zwey Ziffern besteht, in den Cubum erhoben wird, so kann die Anzahl der Ziffern nicht über sechs aber auch nicht unter 4 seyn. Denn es fängt sich der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel in der Stelle der Tausender an, und kann bis in die Stelle der Hunderttausender gehen. Demnach enthält eine solche Cubikzahl dreymal so viele Ziffern, oder dreymal so viele weniger zwey, als die Wurzel hat. Theilt man daher eine von 4 bis 6 Ziffern gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Claßen, und giebt jeder Claße drey Ziffern, so kann die Cubikwurzel nicht mehr als zwey Ziffern haben.

§. 145.

§. 145.

Zusatz.

Man setze $a = m + n + o + p - - -$ und $b = x$, so wird $a^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 + (m+n)^2 o + 3(m+n)o^2 + o^3 + 3(m+n+o)^2 p + 3(m+n+o)p^2 + p^3 + - - - ; 3a^2 b = 3(m+n+o+p - - -)^2 x$ und $b^3 = x^3$ d. h. die Cubikzahl einer vieltheiligen Wurzel enthält die Würfel aller Theile, die dreyfachen Produkte aus dem Quadrate der Summe aller vorhergehenden Theile in den nächstfolgenden. und die dreyfachen Produkte aus der Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat das nächstfolgenden. Hieraus ist zugleich begreiflich, daß eine jede vieltheilige Wurzel als eine zweytheilige betrachtet werden kann, wenn alle Theile der vieltheiligen Wurzel ausser den letzten als der erste der zweytheiligen, und der letzte der vieltheiligen der andere der zweytheiligen angesehen wird.

§. 146.

Zusatz.

Eine jede vollkommene Cubikzahl hat höchstens 3mal so viel, und wenigstens 3mal so viel weniger zwey Ziffern. Theilt man daher eine mit Ziffern geschriebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Claßen, und giebt jeder Claße drey Ziffern, so kann die Wurzel nicht mehr Ziffern haben, als Claßen gemacht worden.

§. 147.

§. 147.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Aufgabe.

1. Man theile sie von der Rechten gegen die Linke in Claßen, und gebe jeder Claße drey Ziffern:

2. Suche man nach den 122. §. eine Ziffer, deren Cubus den Ziffern der höchsten Claße entweder gleich oder nächst kleiner ist, diese ist der erste Theil der Wurzel.

3. Den Würfel dieses ersten Theils subtrahire man von den Ziffern der höchsten Claße, und setze zu diesen Reste die folgende Claße. Nun nehme man das Quadrat des ersten Theils der Wurzel dreymal, und setze dieses dreyfache unter die höchste Ziffer der folgenden Claße, und dividire damit in die darüberstehende Zahl, der Quotiente kann der zweyte Theil der Wurzel seyn. Um sich nun davon zu überzeugen, so multiplicire man

4. Diesen Quotienten in das n. 3. gefundene dreyfache Produkt vom Quadrate des ersten Theils der Wurzel, und setze dieses Faktum unter das dreyfache.

5. Multiplicire man das Quadrat des angenommenen Quotienten mit dem ersten Theile der Wurzel, nehme dieses Produkt dreymal, und setze die niedrigste Ziffer desselben unter die mittelste Ziffer der heruntergenommenen Claße.

6. Noch nehme man den Würfel vom Quotienten, und setze die niedrigste Ziffer desselben unter die niedrigste Ziffer der heruntergenommenen Claße und addire ihn zu den n. 4 und, 5. gefundenen dreyfachen Produkten. Ist nun diese Summe dem Reste der ersten und zweyten Claße zusammengenommen gleich, so ist der Quotient der zweyte Theil der Wurzel. Wäre diese Summe kleiner, so subtrahire man dieselbe von dem Reste der ersten und der zweyten Claße. Sollte aber diese Summe größer seyn, so muß man den angenommenen Quotienten um Eins oder mehrere Einheiten vermindern. Im Fall nun die gebebene Zahl höchstens aus 6 und wenigstens aus 4 Ziffern besteht, so hat man entweder die Wurzel genau oder doch wenigstens so weit gefunden, daß sie um keine Einheit größer mehr seyn kann. Enthält endlich die gegebene Zahl mehr als 6 Ziffern, so setze man zur Differenz voriger Summe und des Restes der ersten und der zweyten Claße zusammengenommen die folgende Claße.

7. Nun nehme man die beyden ersten Theile der Wurzel als den ersten Theil an, und suche sodann

dann nach n. 3. 4. 5 und 6 den folgenden Theil der Wurzel. Ueberhaupt laßen sich nunmehr alle gefundene Theile der Wurzel als den ersten annehmen, und man kann den folgenden nach eben den Regeln finden (§. 145. 146.) Z. E.

175|616 (a b
$a^3 = 125$| 5 6

50616

$3a^2 = 75$

$3a^2b = 460$

$3ab^2 = 440$

$b^3 = 216$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 50616$

0

a b
a b |
a b | |
a b | | |

183 657|238|899|688 (5 6 8 4 2
$a^3 = 125$|

58657

$3a^2 = 75$

$3a^2b = 450$

$3ab^2 = 540$

$b^3 = 216$

50616

8041

8041238

$$
\begin{array}{rcr}
 & & 8041238 \\
3a^2 & = & 9408 \\
\hline
3a^2b & = & 75264 \\
3ab^2 & = & 10757 \\
b^3 & = & 512 \\
\hline
 & & 7634432 \\
\hline
 & & 406806899 \\
3a^2 & = & 967872 \\
\hline
3a^2b & = & 3871488 \\
3ab^2 & = & 27264 \\
b^3 & = & 64 \\
\hline
 & & 387421504 \\
\hline
 & & 19385395688 \\
3a^2 & = & 96923568 \\
\hline
3a^2b & = & 193847136 \\
3ab^2 & = & 68208 \\
b^3 & = & 8 \\
\hline
 & & 19385395688 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

§. 148.

Zusatz.

Wenn ein Rest bleibet, so muß derselbe kleiner seyn als das triplum der gefundenen Wurzel und das triplum des Quadrats der gefundenen Wurzel zusammen addiret um Eins vermehret.

§. 149.

Zusatz.

Die Cubikwurzel aus einem Bruche findet man, wenn aus dem Zähler sowohl als aus dem Nenner die Cubikwurzel gezogen wird.

§. 150.

Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen Cubikzahl die Wurzel so genau zu finden als man will.

Auflösung.

Man setze zu der gegebenen Zahl dreyfache Nullen, alsdenn betrachte man die Zahl als eine ganze Zahl, und gebe der Wurzel so viele Decimalstellen, als der dritte Theil von den Nullen ausmachet, welche, der Zahl sind beygefüget worden. Auch kann man jedesmal zum Reste einer unvollkommenen Cubikzahl drey Nullen anhängen, und die Wurzel so weit als man will finden. z. E.

$\sqrt[3]{7} = 1{,}91\ldots$

1
6000
3
27
243
729
5859
141000
1083
1083
57
1
108871
(32129) u. s. f.

Probe

Probe.

1,91
1,91

191
1719
191

3,6481
191

36481
328329
36481

6,967871
32129.

7,000000

§. 151.

Zusatz.

Die Cubikwurzel aus einem Decimalbruche findet man, wenn die Anzahl der Decimalstellen so beschaffen, daß sie durch drey theilbar (welches durch Beyfügung einer oder zweyer Nullen zu wege gebracht werden kann), indem man den Decimalbruch als eine ganze Zahl betrachtet, und der Wurzel den dritten Theil der Decimalstellen giebt. So ist

$$\sqrt[3]{0,6432} = \sqrt[3]{\frac{6432}{10000}} = \sqrt[3]{\frac{643200}{1000000}} = \sqrt[3]{\frac{643200}{100}}$$

$\sqrt[3]{0,643200}$.

§. 152.

Zusatz.

Man kann auch die Cubikwurzel einer zusammengesetzten Zahl auf diese Weise finden, daß man

sie in ihre Faktoren zerfällt, und die Cubikwurzeln derselben in einander multipliciret. Es ist nemlich $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8.4} = 2\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64.2} = 4\sqrt[3]{2}$ u. s. Uebrigens kann allemal ein Bruch so verändert werden, daß die Cubikwurzel des Nenners rational wird. Denn es ist $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{48}{64}} = \frac{\sqrt[3]{48}}{4}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; und überhaupt $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b}}$.

§. 153.

Aufgabe.

Von der zweytheiligen Wurzel die vierte, fünfte u. s. Potenz zu finden.

Auflösung.

Man multiplicire den Cubus von $a + b$ oder

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

mit $a + b$

$$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$$

$$a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$ die vierte Potenz.

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
mit $a + b$

$$a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$$
$$a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$
$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

die fünfte Potenz u. s.

§. 154.

Zusatz.

Bey jeder Potenz einer zweytheiligen Wurzel laßen sich zwey Stücke unterscheiden, nemlich die Exponenten, welche beyde Theile der Wurzel haben, und die Zahlen, womit beyde Theile sind multipliciret worden, oder die Coefficienten.

§. 155.

Zusatz.

Der Exponent des ersten Gliedes ist mit der Potenz einerley, und im jeden folgenden Gliede wird sein Exponent um Eins kleiner bis er im letzten Gliede $= 0$ wird, dagegen ist der Exponent des zweyten Theils im ersten Gliede $= 0$, im folgenden $= 1$, im dritten $= 2$, und wächst im folgenden Gliede um Eins, bis er im letzten Gliede mit der Potenz selbst einerley ist. Setzt man also statt der Coefficienten die Buchstaben A, B, C u. s. so ist die mte Potenz unter folgenden allgemeinen Ausdrucke begriffen:

$$a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + Da^{m-4}b^4 + \text{u. s.}$$

§. 156.

Erklärung.

Wenn verschiedene Buchstaben sind gegeben worden, und man sieht bloß auf die Ordnung, wie sie gestellet werden können, so nennt man dieses die **Versetzungen** der Buchstaben.

§. 157.

Aufgabe.

Zu finden, auf wie vielerley Art sich eine Menge verschiedener Buchstaben versetzen laße.

Auflösung.

Man multiplicire die Anzahl der gegebenen Buchstaben mit den in der natürlichen Ordnung auf einander folgenden kleinern Zahlen bis auf Eins, das Produkt ist die Zahl aller möglichsten Versetzungen. Z. E. von abc sind die möglichen Versetzungen 3. 2. 1 = 6. Man hat nemlich

abc bac cab
acb bca cba

Beweis

Man mag die Buchstaben ordnen wie man will, so muß doch ein jeder den Anfang machen. Ist nun die Anzahl der Buchstaben = n, so hat man n Versetzungen. In jeder dieser n Versetzungen kann nun von n — 1 Buchstaben ein jeder zuerst gesetzet werden, demnach erhält man n (n — 1) Versetzungen. Nun können wiederum in den n (n — 1) Verdie n — 2 Buchstaben ein jeder zuerst gesetzet werden,

den, und die Anzahl der Versetzungen wird n (n − 1) (n − 2). Dieser Beweis kann fortgesetzet werden, bis zulezt ein Buchstabe übrig bleibet, welcher nur eine Versetzung giebt, demnach ist die Anzahl aller möglichen Versetzungen = n (n − 1) (n − 2) (n − 3) — — — 3. 2. 1.

§. 158.

Zusaz.

Sollten in den gegebenen Buchstaben gleiche vorkommen, so muß man von kleinsten Zahlen so viel weglaßen, als der Anzahl nach gleicher Buchstaben vorhanden sind, oder man muß mit der Anzahl der Versetzungen der gleichen Buchstaben in die Zahl der Versetzungen aller Buchstaben dividiren, wenn sie als verschieden betrachtet werden. Wären z. E. in ab aac alle Buchstaben verschieden, so wäre die mögliche Versetzung 5. 4. 3. 2. 1. Weil aber drey gleiche Buchstaben darinn vorkommen, so muß man 3. 2. 1. weglassen, oder damit dividiren, da sodann die möglichen Versetzungen seyn werden $5.4 = 20 = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} = 5.4$.

§. 159.

Aufgabe.

Die Coefficienten eines jeden Gliedes in einer Potenz einer zweytheiligen Wurzel zu finden.

Auflösung.

Man versetze die Buchstaben eines jeden Gliedes der Potenz, die Anzahl der Versetzungen eines

jeden Gliedes ist der Coefficiente desselben. Soll man z. E. die Coefficienten der Glieder der vierten Potenz suchen, so ergiebt sich

$$aaaa + Aaaab + Baabb + Gabbb + bbbb$$

und der Coeffecient von $aaaa = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1$; von $aaab = \frac{4.3.2.1}{1.2.3} = \frac{4}{1}$, von $aa\,bb = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = \frac{4.3}{2.1}$, von $abbb = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.} = \frac{4.3.2}{1.2.3}$ und von $bbbb = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1$.

§. 160.

Zusatz.

Man kann also die mte Potenz einer zweytheiligen Wurzel unter folgende allgemeine Form bringen: $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.\,m-1}{1.\,2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.\,2.\,3}.\, a^{m-3} b^3 +$ u. f. Nun ist $\frac{m}{1} a^{m-1} b = \frac{m\,a^m b}{a} = a^m.\,\frac{mb}{a}$ und $\frac{m}{1}.\,\frac{m-1}{2}.$

$$a^{m-2}b^2 = m\,\frac{\frac{m-1}{2} a^{m-1} b^2}{a} = \frac{ma^{(m-1)}\,a^{m-1}\,b^2}{2a}$$

$= ma^{m-1} b.\,\frac{(m-1)b.}{2a}$. Multipliciret man also $\frac{mb}{a}$ durch das erste Glied, so entsteht das zweyte, multipliciret man $\frac{(m-1)\,b}{2a}$ durch das zweyte, so entsteht das dritte u. f. Wenn man demnach das erste Glied $= A$, das zweyte $= B$, das dritte $= C$ u. f. setzt, so ergiebt sich:

$(a + b)^m$

$$(a+b)^m = a^m = A$$
$$+ \frac{ab}{a} \times A = B$$
$$+ \frac{(m-1)b}{2a} \times B = C$$
$$+ \frac{(m-2)b}{3a} \times C = D \text{ u. f.}$$

Diese Regel zur Erhebung der Potenzen einer zweytheiligen Wurzel wird von dem Erfinder die Newtonische Regel nennt.

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnißen und Proportionen.

§. 161.

Erklärung.

Man vergleicher eine Größe mit einer andern, wenn man eine Prüfung anstellet, ob die eine der andern gleich oder ungleich ist. Stellt man wirklich eine Vergleichung mit zwey Größen an, so heißt die Beziehung der einen Größe gegen die andere ein Verhältniß. Man kann aber eine Größe mit einer andern auf zweyerley Weise vergleichen, indem man untersuchet, um wie viel oder um wie vielmal eine Größe größer oder kleiner als die andere ist. Im ersten Falle heißt das Verhältniß ein arithmetisches, und im zweyten ein geometrisches z. E. Von den beyden Zahlen 8 und 12 ist die eine 8 um 4 Einheiten kleiner als 12, deswegens betrachtet man sie im arithmetischen Verhältnisse, hingegen untersucht man, um wie vielmal 12 größer als 3, so betrachtet man sie im geometrischen Verhältnisse.

Die Differenz beyder Größen im arithmetischen Verhältniße wird der Nahme des Verhältnißes, und die Zahl, welche angiebt, wie vielmal eine Größe größer oder kleiner ist als die andere im geometrischen Verhältniß, der Exponent des Verhältnißes genennt. Diesen Exponenten kann man sich als einen Quotienten vorstellen, welcher entsteht, wenn man die erste Größe durch die zweyte dividiret.

§. 162.

Erklärung.

Die Größen, welche in einem Verhältniße sich befinden, heißen auch die Glieder des Verhältnisses, und zwar das erste (antecedens), welches sich auf die andere Größe, und das zweyte (consequens), welches sich auf die erste Größe bezieht.

Anmerk. Man bezeichnet das arithmetische Verhältniß durch $a + d - a$ und das geometrische durch $ae : a$.

§. 163.

Aufgabe.

Es ist das erste Glied und der Nahme des Verhältnißes gegeben, man soll das zweyte Glied finden.

Auflösung.

Man addire den Nahmen des Verhältnißes zum ersten Gliede, die Summe ist das zweyte Glied. Z. E. ist 6 das erste Glied und 4 der Nahme, so ist $6 + 4 = 10$ das zweyte Glied; ist ferner 12 das erste und -3 der Nahme, so ist $12 - 3 = 9$ das zweyte Glied.

§. 164

§. 164.

Erklärung.

Wenn zwey Größen ein gemeinschaftliches Maas haben; das Maas mag eine ganze Zahl oder ein Theil der Einheit seyn, so heißen sie commensurable **Größen**, und wenn die Glieder im geometrischen Verhältniße commensurable Größen sind, so heißt das Verhältniß ein **rationales Verhältniß** Läßt sich aber gar kein gemeinschaftliches Maas von zweyen Größen angegeben, man mag noch so einen kleinen Theil der Einheit annehmen, so werden diese **incommensurable Größen**, und wenn die Glieder eines Verhältnißes incommensurable Größen sind, ein **irrationales Verhältniß** genennt.

§. 165.

Zusatz.

Es läßt sich also die Größe eines rationalen Verhältnißes durch eine bestimmte ganze oder gebrochene Zahl ausdrucken; hingegen die Größe eines irrationalen Verhältnißes wird sich weder durch eine ganze noch gebrochene Zahl bestimmt angeben laßen. Z. E. 12 : 3 ist eine rationales und $\sqrt{3} : 2$ ein irrationales Verhältniß.

§. 166.

Lehrsatz.

Wenn von den beyden gleichartigen Größen a und b die eine Größe $a > b$ ist, so kann man eine ganze Zahl n annehmen, welche in a dividiret ei-

nen Quotienten giebt, welcher kleiner als b ist, so klein auch b seyn mag.

Beweis.

Man nehme die Zahl n so groß an, daß das Produkt $nb > a$ wird, alsdenn ist $b > \frac{a}{n}$ oder $\frac{a}{n} < b$.

§. 167.

Aufgabe.

Den Exponenten eines irrationalen Verhältnisses a : b so genau zu finden, daß der noch fehlende Theil kleiner werden kann, als jeder noch so kleine gegebene Bruch.

Auflösung.

Es sey n eine sehr große Zahl, und man theile b in n gleiche Theile so ist $\frac{b}{n} = \frac{1}{n} b$ ein Theil von b. Nun untersuche man wie vielmal dieser Theil in a enthalten sey. Gesetzt man fände m mal und es bleibe ein Rest = r, so muß $r < \frac{1}{n} b$ seyn; alsdenn hat man $a = \frac{m}{n} b + r$, also $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{r}{b}$, und es ist $\frac{r}{b} < \frac{1}{n}$. Man kann aber n so groß annehmen, daß $\frac{1}{n}$ kleiner als jeder noch so kleine Bruch werden kann (§. 166.), mithin muß um so mehr $\frac{r}{b}$ kleiner als ein solcher gegebener Bruch seyn.

§. 168.

Zusatz.

Man setze $\frac{m}{n} + \frac{r}{b} = e = \frac{a}{b}$ oder $eb =$ a. Demnach läßt sich jedes geometrische Verhältniß allgemein durch ae : a ausdrucken, der Exponent e mag rational oder irrational seyn.

§. 169.

Lehrsatz.

Wenn eine bekannte Zahl α kleiner als der Exponent des irrationalen Verhältnißes a : b, so kann der rationale Theil des Exponenten größer als α werden.

Beweis.

Nach der Voraussetzung soll $\alpha < \frac{a}{b}$ seyn. Man nehme nun $\alpha + \beta = \frac{a}{b}$, und n sey eine ganze Zahl, so daß $\frac{1}{n} < \beta$ wird. Nun sey $a = \frac{m}{n} b + r$, so ist $r < \frac{1}{n} b$ (§. 167.), also $\frac{r}{b} < \frac{1}{n}$, mithin auch $\frac{r}{b} < \beta$. Weil aber $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{r}{b}$ wird, so erhält man $\frac{m}{n} + \frac{r}{b} = \alpha + \beta$, und es wird $\frac{m}{n} > \alpha$, weil $\frac{r}{b} < \beta$ ist.

§. 170.

Aufgabe.

Es ist das erste Glied und der Exponente eines geometrischen Verhältnißes gegeben, man soll das zweyte Glied finden.

Auf=

Auflösung.

Man dividire das erste Glied durch den Exponenten, der Quotiente ist das zweyte Glied. Z. E. ist 12 das erste Glied und 4 der Exponente, so ist das zweyte $\frac{12}{4} = 3$; ist aber 8 das erste und $\frac{1}{3}$ der Exponent, so ist das zweyte $= \frac{8}{\frac{1}{3}} = 24$.

§. 171.

Erklärung.

Wenn sich eine Größe a arithmetisch oder geometrisch gegen b eben so verhält, wie sich eine dritte c arithmetisch oder geometrisch gegen d verhält, so sind beyde Verhältniße einander gleich.

§. 172.

Grundsätze.

Gleiche Verhältniße haben gleiche Nahmen und gleiche Exponenten, und umgekehrt. Ungleiche Verhältniße haben ungleiche Nahmen nnd ungleiche Exponenten, und umgekehrt. Zwey Verhältniße, welche einem dritten gleich sind, sind unter sich gleich, und wenn ein Verhältniß größer oder kleiner als eins von zweyen gleichen Verhältnißen ist, so ist es auch größer oder kleiner als das andere.

§. 173.

Lehrsatz.

Wenn in den Verhältnißen a : b und c : d, $\frac{1}{n}$ b in a eben so vielmal enthalten ist, als $\frac{1}{n}$ d in c, so ist

ist $a : b = c : d$, wie groß auch n angenommen wird.

Beweis.

Sind die Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ rational, so sey $\frac{1}{n} b$ in a, also auch $\frac{1}{n} d$ in c $m$mal enthalten, alsdenn hat man $a = \frac{m}{n} b$ und $c = \frac{m}{n} d$, mithin $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{c}{d}$ oder $a : b = c : d$. Sind aber die Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ irrational, so sey $a = \frac{m}{n} b + r$ und $c = \frac{m}{n} d + \varrho$, mithin $r < \frac{1}{n} b$ und $\varrho < \frac{1}{n} d$, also auch $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{r}{b}$ und $= \frac{c}{d} = \frac{m}{n} + \frac{\varrho}{d}$ oder $\frac{a - r}{b} = \frac{m}{n} = \frac{c - \varrho}{d}$. Nun ist entweder $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ oder $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Man setze $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, so kann man n so groß annehmen, daß der rationale Theil von $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ wird oder $\frac{a - r}{b} > \frac{c}{d}$, und daher $\frac{c - \varrho}{d} > \frac{c}{d}$, welches unmöglich ist. Wäre aber $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so kann man abermals n so groß annehmen daß der rationale Theil von $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ oder $\frac{c - \varrho}{d} > \frac{a}{b}$ folglich auch $\frac{a - r}{b} > \frac{a}{b}$ wird, welches wieder unmöglich. Demnach muß $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $a : b = c : d$ seyn.

§. 174.

Zusatz.

Wenn daher $a:b = c:d$, so ist auch $\frac{1}{n}b$ in a eben so vielmal enthalten, als $\frac{1}{n}d$ in c enthalten ist, denn sonst wären $a:b$ und $c:d$ ungleich groß.

§. 175.

Erklärung.

Die Gleichheit zweyer Verhältniße wird eine **Proportion** genennt, welche also so wohl arithmetisch als geometrisch seyn kann. Es sind demnach in jeder Proportion vier Größen, welche **Proportionalgrößen** oder die **Glieder** der Proportion heißen. Die erste und vierte Proportionalgröße nennt man auch **äussere**, und die zweyte und dritte **mittlere** Proportionalgrößen. Nun ist entweder das zweyte Glied gleich dem dritten oder nicht. Im ersten Falle heißt die Proportion **stetig** oder **zusammenhängend**, und im zweyten Falle **getrennt**. Der allgemeine Ausdruck einer stetigen arithmetischen Proportion ist $a - a + d - a + 2d$, und einer geometrischen $a:ae\ (ae)^2$; einer getrennten arithmetischen aber $a - a + d = b - b + d$ und einer geometrischen $a:ae = b:be$.

§. 176.

Lehrsatz.

In einer jeden arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äussern Glieder der Summe der beyden mittlern, und in einer geometrischen das Produkt

Produkt der beyden äussern dem Produkte der beyden mittlern gleich.

Auch wenn die Summe zweyer Größen der Summe zweyer anderer Größen gleich, so wie auch zwey Produkte einander gleich sind, so sind im ersten Falle die Theile der einen Summe äussere und die Theile der andern Summe mittlere arithmetische; hingegen im zweyten Falle die Faktoren des einen Produktes äussere und die Faktoren des andern Produktes mittlere geometrische Proportionalgrößen

Beweis.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke der arithmetischen Proportionen $a - a + d = b - b + d$ hat man $a + b + d = a + d + b$, und der geometrischen $a : ae = b : be$, $abe = aeb$.

Nimmt man ferner $a + b = c + d$, so hat man $a + b - c = d$ und $a - c = d - b$; ist aber $ab = cd$, so ergiebt sich $\frac{ab}{c} = d$ und $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ oder $a : c = d : b$.

§. 177.

Zusatz.

In einer stetigen arithmetischen Proportion ist das doppelte mittlere Glied gleich der Summe des ersten und dritten Gliedes, und in einer geometrischen das Quadrat des mittleren gleich dem Produkte des ersten und dritten Gliedes.

§. 178.

§. 178.

Zusatz.

Wenn zu zwey ungleichen Größen gleiches addiret oder davon subtrahiret wird, so verhält sich die eine gegebene Zahl zu ihrer Summe oder Differenz, wie die andere gegebene Zahl zu ihrer Summe oder Differenz. Auch wenn zwey ungleiche Zahlen durch gleiche rationale oder irrationale Zahlen multipliciret oder dividiret werden, so ist das Verhältniß der einen Zahl zum Produkte oder Quotienten gleich dem Verhältnisse der andern Zahl zu ihrem Produkte oder Quotienten. Aus eben dem Grunde verhält sich auch Eins zu einem Faktor, wie der andere Faktor zum Produkte, und der Divisor zur Einheit, wie das Dividendum zum Quotienten.

§. 179.

Zusatz.

Wenn die vier Glieder einer Proportion gleichartig sind, so verhält sich auch das erste zum dritten, wie das zweyte zum vierten.

§. 180.

Lehrsatz.

Wenn alle vier Glieder der Proportion $a:b = c:d$ von einerley Art sind, so hat man auch (terminos antecedentes et consequentes addendo et differentiando) $a \pm c : b \pm d = a:b = c:d$.

Beweis

Sind $a:b = c:d$ rationale Verhältnisse, und $a = mb$, also $c = md$, so hat man $a + c = mb + md = (b + d)\,m$, und daher $\frac{a+c}{b+d} = m = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$\frac{c}{d}$, folglich $a + c : b + d = a : b = c : d$. Ferner ist auch $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$ oder $a - c : b - d = a : b = c : d$.

Sind aber $a : b$ und $c : d$ irrationale Verhältniße, so sey $a = \frac{m}{n} b + r$ und $c = \frac{m}{n} d + \varrho$, und man erhält $a + c = (b + d) \frac{m}{n} + r + \varrho$ oder $\frac{a+c}{b+d} = \frac{m}{n} + \frac{r+\varrho}{b+d}$. Es ist aber $\frac{r+\varrho}{b+d} < \frac{1}{n}$, weil $r + \varrho < \frac{1}{n} (b + d)$ ist, demnach $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oder $a + c : b + d = a : b = c : d$. Eben so findet man auch $a - c : b - d = a : b = c : d$.

§. 181.

Zusatz.

Hat man daher folgende Proportionen

$a : b = q : f$

$c : d = q : f$

$e : f = q : f$ u. s.

so folgt auch $a + c + e : b + d + f = q : f$,

§. 182.

Zusatz.

Aus der Proportion $a \pm c : b \pm d = a : b = c : d$ folgt zusammengesetzt und getheilt (componendo et diuidendo) $a \pm c : a = b \pm d : d$. Weil aber auch ferner $a : b = a \pm c : b \pm d$, so hat man auch umgekehrt (conuertendo) $a : a \pm c = b : b \pm d$.

§. 183.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen Größen die vierte arithmetische oder geometrische Proportionalgröße zu finden.

Aufgabe.

In der rithmetischen Proportion addire man die zweyte und dritte, und subtrahire von dieser Summe die erste Größe, die Differenz ist die vierte Proportionalgröße. In der geometrischen Proportion multiplicire man die zweyte mit der dritten Größe, und dividire dieses Produkt durch die erste Größe, der Quotient ist die vierte Porportionalgröße. Z. E.

8, 12, 16 geben

16 + 12 = 28

8

20 zur viert. Proportionalgröße

6 : 12 = 36 : 72.

12

22

36

432

432 (72

6

42

12

12

Beweis.

Es sey $a - b = c - x$, mithin $a + x = b + c$, und folglich $x = b + c - a$. Ferner sey $a : b = c : x$, also $ax = bc$ und $x = \frac{bc}{a}$.

§. 184.

Zusatz.

Es ist also die dritte Proportionalgröße in einer stetigen arithmetischen Proportion der Differenz

des

des gedoppelten mittleren und des ersten, und in einer geometrischen dem Quotienten aus dem Quadrate des mittlern durch das erste Glied dividiret gleich.

§. 185.

Aufgabe.

Die mittlere Proportionalgröße einer stetigen Proportion zu finden.

Auflösung.

In einer arithmetischen stetigen Proportion nehme man die Summe des ersten und dritten Gliedes, und dividire diese Summe durch 2. der Quotiente ist die mittlere Proportionalgröße: in einer geometrischen stetigen Proportion aber multiplicire man das erste und dritte Glied, und ziehe aus diesem Produkte die Quadratwurzel.

Beweis.

Man setze a, b, c drey Größen, die in einer stetigen arithmetischen Proportion sich befinden, so hat man $a + c = 2b$ und $b = \frac{a+c}{2} = \frac{1}{2}(a+c)$.

Ferner nehme man m, n, q drey Größen, die in einer stetigen geometrischen Proportion sich befinden, so ist $mq = n^2$, folglich $n = \sqrt{mq}$.

§. 186.

Lehrsatz.

Wenn zur halben Summe zweyer Größen ihre halbe Differenz addiret wird, so entsteht die größere

Größe; wenn aber die halbe Differenz von der halben Summe subtrahiret wird, so erhält man die kleinere Größe.

Beweis.

Man setze die beyden gegebenen Größen a und b, und $b > a$ so ist $\frac{1}{2}(a+b)$ die mittlere arithmetische stetige Porportionalgröße zwischen a und b. Alsdenn hat man den Nahmen des Verhältnißes $\frac{1}{2}(b-a)$ und $b = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)$ und $a = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a)$.

§. 187.

Lehrsatz.

Wenn $a:b = c:d$ und
$f:g = h:k$, so hat man auch
$af:bg = ch:dk$

Beweis.

Es ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{f}{g} = \frac{h}{k}$, mithin auch $\frac{af}{bg} = \frac{ch}{dk}$ oder $af:bg = ch:dk$.

§. 188.

Zusatz.

Wenn demnach $a:b = c:d$, so hat man auch $a^n : b^n = c^n : d^n$, und umgekehrt $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

§. 189.

Zusatz.

Aus beyden Proportionen

$a:b = c:d$ und

$b:f = d:g$

folgt (ordinatim et ex aequo) die dritte $a:f = c:g$.

§. 190.

Zusatz.

Hat man ferner

$a:b = c:d$ und

$b:f = g:c$

so folgt (perturbate et + ex aequo) $a:f = g:d$.

§. 191.

Zusatz.

Wenn $a:b = c:d$, so ist auch $a:a+b = c:c+d$ und $a-b:a = c-d:c$, mithin auch $a-b:a+b = c-d:c+d$, und $a-b:c-d = a+b:c+d$.

§. 192.

Erklärung.

Wenn man zwey oder mehrere Verhältniße von dieser Art $a:b$, $b:c$, $c:d$ u. s. hat, so sagt man das Verhältniß $a:c$ oder $a:d$ sey zusammengesetzt aus den Verhältnißen $a:b$ und $b:c$ oder $a:b$, $b:c$ und $c:d$. Man kann sich nemlich vorstellen, daß, wenn man a mit c vergleichen will, zuerst a mit b und alsdenn b mit c verglichen werden müße, daß folglich $a:c$ die beyden Verhältniße in sich begreift oder daraus zusammengesetzet sey.

Man bezeichnet die zusammengesetzten Verhältnisse gemeiniglich so:

$$a:c = \begin{cases} a:b \\ b:c \end{cases} \qquad a:d = \begin{cases} a:b \\ b:c \\ c:d \end{cases}$$

$$1:15 = \begin{cases} 1:3 \\ 3:15 \end{cases} \text{ u. s.}$$

§. 193.

Lehrsatz.

Das Verhältniß zweyer Produkte ist zusammengesetzt aus den Verhältnißen der Faktoren.

Beweis.

Es sey $m:n = a:b$ und

$q:f = b:c$, so ist

$b = \frac{n}{m} \cdot a$ also

$q:f = \frac{n}{m} a:c$, folglich $c = \frac{f}{q} \cdot \frac{n}{m} \cdot a$ oder

$\frac{a}{c} = \frac{q.m}{f.n}$ oder $a:c = q.m:fn.$

§. 194.

Zusatz.

Hat man demnach folgende Proportionen

$m:n = a:b$

$q:p = b:c$

$r:f = c:d$

$t:u = d:e$ u. s. so hat man auch

$m.q.r.t:n.p.f.u = a:e.$

§. 195.

Erklärung.

Wenn ein zusammengesetztes Verhältniß aus verschiedenen gleichen Verhältnißen besteht, so nennt man es ein vervielfachtes Verhältniß (ratio multiplicata); ins besondere heißt es ein verzweyfachtes, verdreyfachtes u. s. Verhältniß (ratio duplicata, triplicata etc.), wenn es aus zweyen, dreyen, oder mehrern gleichen Verhälnißen besteht. Hat man z. E.

$$a:b = m:n$$
$$b:c = m:n$$
$$c:d = m:n$$

so ist a:c doppelt so groß als m:n In dieser Rücksicht ist alsdenn das Verhältniß m:n halb so groß als a:c (ratio subduplicata); das Verhältniß a:d aber ist dreymal so groß als m:n, und m:n $\frac{1}{3}$ des Verhältnißes a:d (ratio subtriplicata).

§. 196.

Zusatz.

Wenn $a:b = b:c$ so ist $a:c = \begin{cases} a:b \\ a:b \end{cases}$ d. h. das Verhältniß des ersten Gliedes zum dritten in einer stetigen Proportion ist doppelt so groß als das Verhältniß des ersten zum zweyten. Man setze $a = 1$, so ist $c = b^2$, also $1 : b^2 = \begin{cases} 1:b \\ 1:b \end{cases}$ d. h. das Verhältniß der Einheit zu einem Quadrate ist doppelt so groß als das Verhältniß der Einheit zur Wurzel, und des Verhältniß der Einheit

zur Wurzel halb so groß als das Verhältniß der Einheit zum Quadrate.

§. 197.

Zusatz.

Wenn $a:b = b:c = c:d$ so ist $a:d = \begin{cases} a:b \\ a:b \\ a:b \end{cases}$

d. h. das Verhältniß $a:d$ ist dreymal so groß als das Verhältniß $a:b$. Setzt man wie im vorigen §. $a = 1$. so ist $d = b^3$, und es ist $1:b^3 = \begin{cases} 1:b \\ 1:b \\ 1:b \end{cases}$

d. h. das Verhältniß der Einheit zu einer Cubikzahl ist dreymal größer als das Verhältniß der Einheit zur Wurzel.

Fünftes Kapitel.

Von den Gleichungen und Progreßionen.

§. 198.

Erklärung.

Alle Größen, welche aus gegebenen Größen gefunden werden, haben jederzeit mit diesen eine Verbindung. Eine jede Aufgabe nemlich muß solche Bedingungen enthalten, woraus man berutheilen kann, wie die unbekannten Größen durch Hülfe der bekannten gefunden werden können. Keine andere Verbindung können sie aber nnter einander haben, als daß sie einander entweder gleich, oder ungleich sind. Mehrentheils geben die Bedingungen einer Aufgabe an, wie die bekannten mit den unbekannten

ver-

verbunden werden, damit sie einander gleich sind. Bezeichnet man sodann die bekannten Grösten so wohl als die unbekannten mit allgemeinen Zeichen, so erhält man einen allgemeinen Ausdruck, welcher angiebt, was für Operationen mit den bekannten Größen vorzunehmen sind, damit die bekannten mit den unbekannten in ihrer Verbindung untereinander gleich bleiben. Ein solcher Ausdruck wird eine mathematische Gleichung genannt. Mit vielem Vortheile gebraucht man die Buchstaben als allgemeiner Zeichen der Größen, und zwar für die bekannten die Anfangsbuchstaben a, b, c, d u f. für die unbekannten aber die letzten Buchstaben des Alphabets z, x, y u. f.

§. 199.

Erklärung.

In einer Gleichung befindet sich auser den bekannten Größen nur eine einzige unbekannte oder mehrere. Im ersten Falle heißt die Gleichung eine bestimmte, im andern aber eine unbestimmte. Wenn also die Bedingungen einer Aufgabe so beschaffen, daß mehr als eine unbekannte Größe gesucht werden soll, so laßen sich entweder daraus so viele Gleichungen herleiten, als unbekannte Größen zu finden sind, oder nicht. Ist jenes, so heißt die Aufgabe eine bestimmte, ist aber dieses, eine unbestimmte.

§. 200.

Erklärung.

Eine Gleichung enthält die unbekannte Größe entweder in der ersten Potenz oder sie steigt auf hö-

here Potenzen. Jene Gleichung heißt eine einfache, und diese eine höhere oder zusammengesetzte. Eine höherr enthält sodann den Nahmen einer quadratischen, kubischen, biquadratischen u. s. Gleichung, wann die unbekannte Größe in der Gleichung sich im Quadrate, im Cubus, in der vierten u. s. Potenz befindet. Eine höhere Gleichung enthält ferner ein und eben dieselbe Potenz der unbekannten Größe oder nicht. Im ersten Falle heißt sie eine **reine höhere Gleichung**, im zweyten Falle aber eine **unreine** oder **vermischte**.

§. 201.

Erklärung.

Diejenige Gleichung, welche aus den Bedingungen einer Aufgabe unmittelbar gefolgert wird, heißt die **Fundementalgleichung**, diese löset man sodann auf, wenn man die unbekannte Größe auf die eine Seite, die bekannten aber auf die andere Seite des Geichheitzeichens bringt, so daß jene durch diese gefunden wird.

§. 202.

Zusatz.

Man kann alle Glieder der Gleichung unbeschadet derselben in die entgegengesetzten Zeichen nemlich + in — und — in + verwandeln. Z. E.

$$ab - x = f \text{ giebt}$$
$$-ab + x = -f \text{ und}$$
$$x = ab - f.$$

§. 203.

§. 203.

Zusatz.

Wenn eine Aufgabe zur Auflösung vorgeleget worden, so hat man hierbey vorzüglich folgendes zu bemerken: man betrachte die unbekannte Größe als bekannt, und verbinde sie mit den bekannten so, wie es den Bedingungen der Aufgabe gemäs, da man sodann die Fudamentalgleichung erhält. Alsdenn löset man sie auf.

§. 204.

Aufgabe.

Eine einfache Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

1. Wenn einige oder auch alle Glieder der Gleichung Brüche sind, so multiplicire man ein jedes Glied mit dem Produkte aller Nenner.
2. Die ganz bekannten Größen, welche mit der unbekannten Größe durch die Addition verbunden sind, subtrahire man auf beyden Seiten, und welche mit der unbekannten Größe durch die Subtraktion verbunden sind, addire man auf beyden Seiten.
3. Sollte nun die unbekannte Größe noch mit den bekannten durch das Zeichen der Multiplikation verbunden seyn, so werden die Größen zusammengenommen ein Faktor, welcher auch der Coefficient der unbekannten Größe genennt wird. Alsdenn dividire man mit diesem Coefficienten auf beyden Seiten, so ist die Gleichung aufgelöset. Z. E.

$$ab + \frac{c}{g} + x = ax + \frac{m}{n}$$

$abgn + cn + xgn = axgn + mg$ 1te Regel

$xgn - axgn = mg - abgn - cn$ 2te Regel

$(gn - agn)\,x = mg - abgn - cn$ und

$$x = \frac{mg - abgn - cn}{gn - agn.}$$ dritte Regel

§. 205.

Zusatz.

Es läßt sich also eine jede einfache Gleichung auf die Form $x = \pm A$ bringen, wo A die bekannten Größen in ihrer Verbindung anzeiget. Es giebt demnach eine einfache Gleichung für die unbekannte Größe nur einen einzigen bestimmten Werth, welcher entweder positiv oder negativ ist.

§. 206.

Aufgabe.

Eine reine höhere Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

Man wende hier das nemliche Verfahren an, welches bey Auflösung einfacher Gleichungen ist vorgeschrieben worden. Hat man dadurch die Potenz der unbekannten Größe auf die eine Seite, und die bekannte auf die andere Seite des Gleichheitzeichens gebracht, so ziehe man auf beyden Seiten die Wurzel derjenigen Ordnung aus, welche der Exponent der Potenz der unbekannten Größe anzeigt. Z. E.

$$ax^3 - bg = \frac{hc}{m} + abx \quad \text{oder}$$

$$ax^3 - abx^3 = \frac{hc}{m} + bg \quad \text{oder}$$

$$amx^3 - abmx^3 = hc + bgm \quad \text{oder}$$

$$(am - abm)\,x^3 = hc + bgm \quad \text{und}$$

$$x^3 = \frac{hc + bgm}{am - abm} \quad \text{und}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{hc + bgm}{am - abm}\right)}.$$

§. 207.

Erklärung.

Man pflegt die Werthe der unbekanten Größen in höheren Gleichungen Wurzelgrößen zu nennen weil man sie gewöhnlich nicht anders als durch Wurzelzeichen ausdrucken kann.

§. 208.

Zusatz.

Eine jede reine höhere Gleichung läßt sich unter die allgemeine Form $x^n = A$ und $x = \sqrt[n]{A}$ bringen, wo A die in ihrer Verbindung bekannten Größen andeutet Setzt man $n = 2$, so wird $x = \sqrt{A}$. Man nehme nun $A = aa$ so ist wohl $+A = +a \times +a$ als auch $-a \times -a$, mithin $x = \pm\sqrt{A}$ d. h. jede reine quadratische Gleichung giebt für die unbekannte Größe zwey Werthe, welche für sich betrachtet gleich, einander aber entgegengesetzet sind.

§. 209.

Erklärung.

Wenn verlangt wird, daß eine Größe durch solche Operationen zu wege gebracht werden soll, die

die mit einander nicht bestehen können, so nennt man sie eine **unmögliche Größe.**

§. 210.

Zusatz.

Die Quadratwurzel aus einer negativen Größe ist unmöglich. Denn sie kann weder positiv noch negativ seyn. Es können demnach die Werthe einer quadratischen Gleichung unmöglich seyn.

§. 211.

Aufgabe.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen stehet, diese Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche kein Wurzelzeichen mehr hat.

Auflösung.

1. Man bringe die Größe, welche ein Wurzelzeichen bey sich sich führet, auf die eine Seite und die übrigen auf die andere Seite des Gleichheitzeichens. Alsdenn erhebe man die ganze Gleichung in eine Potenz, welche der Wurzelexponent anzeiget z. E.

$$a + \sqrt{(bx^2 - cgx)} = ab \text{ oder}$$

$$\sqrt{(bx^2 - cgx)} = ab - a \text{ und}$$

$$bx^2 - cgx = (ab - a)^2 \text{ oder}$$

$$bx^2 - cgx = a^2b^2 - 2a^2b + a^2 \text{ oder}$$

$$bx^2 - cgx = (b^2 - 2b + 1)\,a^2$$

2. Ist mehr als ein Wurzelzeichen vorhanden, so muß die Arbeit wiederholet werden.

§. 212.

Aufgabe.

Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

1. Man bringe die Glieder der Gleichung, welche die unbekannte Größe enthalten, auf die eine Seite, und die bekannten auf die andere Seite des Gleichheitzeichens, und ordne sie alsdenn so, daß zuerst die Glieder kommen, welche das Quadrat der unbekannten Größe enthalten, und laße darauf diejenigen folgen, in welchen blos die unbekannte Größe befindlich ist. Die im vorigen §. gegebene Gleichung würde also folgende regelmäßige Gestalt bekommen

$$bx^2 - cgx = (b^2 - 2b + 1)\,a^2$$

2. Nun dividire man mit dem Coefficienten von dem Quadrate der unbekannten Größe alle Glieder der Gleichung. Auf solche Weise erhält man

$$x^2 - \frac{cg}{b}x = \frac{(b^2 - 2b + 1)\,a^2}{b}$$

Eine jede unreine quadratische Gleichung läßt sich nun so ausdrucken, daß die ganze Gleichung nur drey Glieder enthalte, wovon das erste das Quadrat der unbekannten Größe, das zweyte ein Produkt aus dem bekannten Coefficienten in die unbekannte Größe, und das dritte eine ganz bekannte ist.

3. Setzt man nun $\frac{cg}{b} = p$ und $\frac{(b^2 - 2b + 1)\,a^2}{b} = q$

so läßt sich jede unreine quadratische Gleichung auf diese allgemeine Form $x^2 + px = q$ bringen.

4. Weil

4. Weil nun $x^2 + px = q$ ein unvollständiges Quadrat, so wird es durch Zusetzung von $\frac{1}{4}p^2$ vollständig, (§. 131), mithin $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$ und

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} \text{ oder}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} \text{ oder}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{(4q + p^2)}{4}} \text{ und}$$
$$x = \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}$$

§. 213.

Lehrsatz.

Eine unreine quadratische Gleichung giebt für die unbekannte Größe zwey Wurzeln und nicht mehrere, welche entweder möglich oder unmöglich sind.

Beweis

Daß sie wenigstens zwey habe, erhellet aus dem vorigen §. Man setze diese a und b, so muß in der Gleichung $x^2 + px = q$ eine jede statt x gesetzet werden können. Demnach ergiebt sich

$a^2 + pa = q$ und
$b^2 + pb = q$, mithin
$a^2 + pa = b^2 + pb$ oder
$p(a - b) = b^2 - a^2$ und
$$p = \frac{b^2 - a^2}{a - b} = \frac{b^2 - ab + ab - a^2}{a - b} = -(a+b)$$

Hätte

Hätte nun die Gleichung noch die dritte Wurzel c, so müßte auch $c^2 + pc = q$ seyn, folglich auch

$$c^2 + pc = b^2 + pb \text{ oder}$$
$$(c - b)\, p = b^2 - c^2 \text{ und}$$
$$p = \frac{b^2 - c^2}{c - b} = -(c + b) \text{ mit-}$$

hin auch $a + b = c + b$ und
$a = c + b - b = c$, und die dritte Wurzel muß mit einer der vorigen gleich seyn.

§. 214.

Zusatz.

Setzt man also statt x die Wurzeln a und b, so wird

$$a = -\frac{p + \sqrt{(4q + p^2)}}{2} \text{ und}$$

$$b = -\frac{p - \sqrt{(4q + p^2)}}{2} \text{ folglich}$$

$$a + b = -p \text{ oder } p = -(a + b) \text{ und}$$
$$ab = \frac{+p^2 - 4q - p^2}{4} = \frac{-4q}{4} = -q \text{ d. h.}$$

in einer jeden unreinen quadratischen Gleichung ist der Coefficient des andern Gliedes gleich der negativen Summe und das dritte bekannte Glied gleich dem negativen Produkte beyder Wurzeln.

§. 215.

Zusatz.

Wenn $x^2 + px = q$, so ist auch $x^2 + px - q = o$ Setzt man nun die im vorigen §. gefundenen Werthe für p und q, so erhält man

$$x^2 - (a+b)x+ab = o$$

Weil aber auch $x = a$ und $x = b$, so hat man auch $x - a = o$ und $x - b = o$, und man findet ebenfalls

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x+ab = o$$

Demnach kann eine jede unreine quadratische Gleichung, wenn die Glieder derselben auf die eine Seite des Gleichheitzeichens gebracht werden, in zwey Faktoren zerleget werden, wovon jeder $= o$ gesetzt eine einfache Gleichung giebt, worinn die Werthe der unbekannten Größe einer Wurzel der Gleichung gleich ist.

§. 216.

Erklärung.

Aus zweyen unbestimmten Gleichungen zwischen zweyen unbekannten Größen die eine wegzuschaffen (eliminare unam incognitam), heißt, aus beyden Gleichungen eine dritte finden, worinn nur noch eine unbekannte Größe enthalten ist.

§. 217.

Aufgabe.

Von zweyen gegebenen unbestimmten Gleichungen zwischen zweyen unbekannten Größen x und y die eine unbekannte Größe x wegzuschaffen.

1. Auflösung.

Man betrachte y als eine bekannte Größe, und suche in jeder Gleichung den Werth von x, darauf setze

setze man beyde Werthe einander gleich, so wird die Gleichung nur nach y enthalten. Z. E.

$ab + x - y = f$ und $ax + by = hm$ also

$x = f + y - ab$ und $x = \frac{hm - by}{a}$ mithin

$f + y - ab = \frac{hm - by}{a}$ oder

$af + ay - a^2 b = hm - by$ oder

$(a + b)y = hm - af + a^2 b$ und

$$y = \frac{hm - af + a^2 b}{a + b}$$

2. Auflösung.

Man suche den Werth von x der einen Gleichung, und setze ihn statt x in der andern Gleichung, so wird diese Gleichung nur noch y enthalten. Z. E.

$x = f - ab + y$ also $a(f - ab + y) + by =$ hm oder $af - a^2 b + ay + by = hm$ mithin $y =$ $hm - af + a^2 b$ / $a + b$.

3. Auflösung.

Man multiplicire alle Glieder der ersten Gleichung mit dem Coefficienten der unbekannten Größe x der andern Gleichung, und die Glieder der andern Gleichung mit dem Coefficienten von x der ersten Gleichung. Alsdenn addire oder subtrahire man die andere Gleichung von der erstern, da sodann eine bestimmte Gleichung erhalten wird, in welcher nur noch y befindlich ist. Z. E.

$$ab + x - y = f$$
$$ax + by = hm$$

$$a^2b + ax - ay = af$$
$$ax + by = hm$$

$$a^2b - by - ay = af - hm \text{ oder}$$
$$(b + a)y = hm - af + a^2b \text{ und}$$
$$y = \frac{hm - af + a^2b}{a + b}$$

§. 218.

Zusatz.

Auf die nemliche Art schaft man aus mehr denn zwey einfachen Gleichungen zwischen eben so vielen unbekannten Größen alle übrige bis aus eine weg.

§. 219.

Aufgabe.

Eine bestimmte Aufgabe aufzulösen.

Auflösung.

1. Man suche aus den Bedingungen der Aufgabe so viel Gleichungen herzuleiten als unbekannte Größen zu finden sind.
2. Aus diesen Gleichungen schaffe man alle unbekannten Größen bis auf eine weg, und suche den Werth von dieser.
3. Diesen Werth der unbekannten Größe setze man in einer der vorhergehenden Gleichungen, in welcher diese unbekannte Größe vorkommt, so wird man dadurch die andern unbekannten Größen bestimmen können.

§. 220.

Aufgabe.

Eine unbestimmte Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

1. Man leite aus den Bedingungen der Aufgabe so viel Gleichungen her, als angehen will.
2. Suche man sodann aus diesen Gleichungen die Werthe der unbekannten Größe.
3. Weil nun diese Gleichungen noch unbekannte Größen enthalten, so kann man für eine solche unbekannte Größe eine Zahl annehmen, welche man will.

§. 221.

Erklärung.

Eine Reihe ist eine Menge von Größen oder Gliedern, welche nach einem gewißen allen gemeinen Gesetze bestimmt werden. Der Ausdruck, welcher dieses allgemeine Gesetz darstellet, heißt das allgemeine Glied oder der allgemeine Satz (terminus generalis), und die Zahl der Glieder (index terminorum) diejenige Zahl, welche angiebt, das wie vielte Glied ein jedes in der Reihe sey.

§. 222.

Erklärung.

Die Glieder in einer Reihe schreiten entweder in einem stetigen arithmetischen oder geometrischen Verhältniße fort. Jene nennt man eine arithmetische und diese eine geometrische Reihe oder Progression.

§. 223.

Zusatz.

Ist das erste Gliede in einer arithmetischen Progression = a, der Nahme des Verhältnißes = d, und die Zahl der Glieder = n, so ist

1 2 3 4 n

a, a + d, a + 2d, a + 3 d — — — a + (n — 1) d

Demnach ist das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe = a + (n — r) d = a + nd — d

Ist ferner a das erste Glied und e der Exponent einer geometrischen Progression, und n die Zahl der Glieder, so ist

1 2 3 4 5 —— n

a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 ——— ae^{n-1}

mithin ist das allgemeine Glied einer geometrischen Progression = ae^{n-1},

§. 224.

Lehrsatz.

In einer jeden arithmetischen Progression ist die Summe der beyden äussersten Glieder so groß als die Summe zweyer anderer Glieder, welche von der äussersten gleich weit entfernet sind.

Beweis

Es bleibt die Summe von zweyen Größen gleich groß, wenn die eine um eben so viel abnimmt als die andere wächst. Dies ist der Fall bey einer arithmetischen Progression. Denn jedes folgende Glied vom ersten angerechnet nimmt um eine Differenz zu, und jedes folgende vom Ende um eine Differenz ab. Das zweyte vom Anfange hat nemlich eine

Differenz

Differenz mehr als das erste, und das zweyte vom Ende eine Differenz weniger als das letzte, also muß die Summe beyder Glieder gleich dem ersten und letzten seyn.

§. 225.

Aufgabe.

Aus dem ersten und letzten Gliede, und der Anzahl der Glieder die Summe aller Glieder zu finden.

Auflösung.

Man addire zu dem letzten Gliede das erste, und multiplicere diese Summe mit der halben Anzahl aller Glieder, das Produkt ist die Summe aller Glieder. Z. E Es sey $a = 4$, $n = 10$ und das letzte Glied $= 22$, so hat man $(4 + 22) \times \frac{1}{2} 10 = 26 \times 5 = 130$.

Beweis.

Es sey die Summe aller Glieder $= s$, das erste $= a$, die Anzahl der Glieder $= n$, und das letzte Glied $= u$, so folget aus dem 223. §. daß, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl aller Glieder multipliciret, dies Produkt zweymal so groß werde als die Summe aller Glieder oder $2s = n (u + a)$, mithin $s = \frac{1}{2} n (u + a)$.

§. 226.

Zusatz.

In der Lehre von den arithmetischen Progressionen giebt es also zwey Fundamentalgleichungen 1. $u = a + nd - d$ und 2. $s = \frac{1}{2} n (a + u)$. Sind

von den fünf Größen a, d, u, n und s drey gegeben worden, so können die beyden übrigen vermittelst dieser Gleichungen gefunden werden.

§. 227.

Lehrsatz.

In einer jeden geometrischen Progression ist das Produkt der beyden äussersten Glieder gleich dem Produkte zweyer anderer Glieder, welche von den äussersten gleich weit entfernet sind.

Beweis.

Es muß das Produkt von zweyen Zahlen gleich bleiben, wenn die eine um so vielmal vermindert wird um so vielmal die andre wächst. Dies ist der Fall bey der geometrischen Progression, weil jedes folgende Glied um einen Exponenten als Fakor größer wird, demnach sind auch die Produkte nach der Voraussetzung gleich groß.

§. 228.

Zusatz.

Weil alle Glieder einer geometrischen Progression in einem stetigen Verhältniße sich befinden, so hat man

$$a : ae = a : ae$$
$$a : ae = ae : ae^2$$
$$a : ae = ae^2 : ae^3$$
$$a : ae = ae^3 : ae^4$$
$$a : ae = ae^4 : ae^{n-2}$$
$$a : ae = ae^{n-2} : ae^{n-1}$$

also auch $a : ae = a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^{n-2} : ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^{n-2} + ae^{n-1}$

Setzt

Setzt man nun das letzte Glied = u, und die Summe aller Glieder = f, so hat man a : ae = f — u : f — a d. h. das Verhältniß des ersten Gliedes zum zweyten ist gleich dem Verhältnisße der Summe aller Glieder weniger dem letzten zu der Summe aller Glieder weniger dem ersten.

§. 229.

Zusatz.

Weil a : ae = 1 : e, so ist auch 1 : e = f — u : f — a oder e : 1 = f — a : f — u und ferner e — 1 : 1 = f — a — f + u : f — u oder e — 1 : 1 = u — a : f — u d. h. das Verhältniß des Exponenten weniger Eins zur Einheit ist einerley mit dem Verhältnisße des letzten Gliedes weniger dem ersten zu der Summe aller Glieder weniger dem letzten.

§. 230.

Aufgabe.

Das erste und letzte Glied nebst dem Exponenten sind gegeben, man soll die Summe aller Glieder finden.

Auflösung.

Man multiplicire das letzte Glied mit dem Exponenten, und subtrahire hiervon das erste Glied. Diese Differenz dividire man durch den Exponenten weniger Eins, der Quotient ist die Summe aller Glieder.

Beweis.

Weil a : ae = f — u : f — a, so ist af — a^2 = aef — aeu oder f — a = ef — eu oder eu — a = ef — f oder eu — a = (e — 1) f folglich $\frac{eu-a}{e-1} = f$.

§. 231.

Zusatz.

In der Lehre von den geometrischen Progressionen giebt es also folgende zwey Fundamentalgleichungen 1. $u = ae^{n-1}$ und 2. $s = \frac{eu - a}{e - 1}$, vermittelst welcher zwey von fünf Größen, a, e, u, n und s gefunden werden können, wenn drey davon sind gegeben worden.

Anmerkungen die praktische Rechenkunst betreffend.

§. 232.

Genannte Zahlen werden diejenigen genennt, welchen man gewiße Arten der Dinge beyleget, die Namen oder Nenner heißen. Um eine gegebene genannte Zahl auf eine andere von kleinern Namen zu bringen, welche den nemlichen Werth haben soll, so multipliciret man die gegebene genannte Zahl durch eine Zahl, welche angiebt, wie viel Stücke der verlangten kleinern Art Eins der größern Art ausmachen, und die Reduktionszahl genennet wird, wie z. E. wenn man Thaler auf Groschen, Pfunde auf Lothe u. s. bringen soll. Eine gegebene genannte Zahl aber auf einen größern Namen vom gleichen Werthe zu bringen, dividiret man dieselbe durch die Reduktionszahl wie z. E. wenn Groschen auf Thaler, Lothe auf Pfunde u. s. reduciret werden sollen.

§. 233.

Was die verschiedenen Rechnungsarten mit genannten Zahlen betrift, so sind diese von den Rechnungs-

nungsarten mit ungenannten Zahlen nicht viel verschieden; alles kömmt nur darauf an, daß man wiße, wie die Arten der Dinge eingetheilet werden. Um nun genannte Zahlen zu addiren, schreibe man sie so unter einander, daß diejenigen Zahlen unter einander zu stehen kommen, welche einerley Namen haben, alsdenn fängt man von der kleinsten Art zu addiren an, findet man in der Summe derselben ein oder mehrere Stücke der nächstgrößern Art, so addire man solche zur nächstgrößern Art, und seze den Ueberrest unter die kleinere Art. Auf solche Weise verfahre man mit den übrigen Arten. Z. E.

26	rthlr.	14 gr.	9 pf.
34	rthlr.	8 gr.	10 pf.
39	rthlr.	16 gr.	8 pf.
99	rthlr.	38 gr.	27 pf.
1		$\frac{2}{40}$	
100	rthlr.	16 gr.	3 pf. Summe

§. 234.

Eine kleinere genannte Zahl von einer größern zu subtrahiren schreibe man den Subtraktor unter das Subtrahendum wie bey der Addition, fange alsdenn von der kleinsten Art zu subtrahiren an. Findet man nun, daß das Subtrahendum kleiner als der Subtraktor ist, so borge man in der obern Reihe von der nächstgrößern Art Eins, und bringe diese auf die Art, von welcher subtrahiret wird, und addire solche zu dieser Art, da sodann die Subtraktion verrichtet werden kann. Auf diese Weise verfahre man mit den übrigen Arten. Z. E.

4 Ctnr. 24 ℔ 2 Loth
2 Ctnr. 28 ℔ 3 Loth.
1 Ctnr. 105 ℔ 31 Loth.

§. 235.

Eine genannte Zahl durch eine ganze Zahl zu multipliciren fange man mit der kleinsten Art zu multipliciren an. Findet sich hier, daß das Produkt einige Stücke der nächstgrößern Art enthalte, so bringe man sie auf dieselbe, und schreibe den Rest mit der kleinsten Art nieder, darauf multiplicire man die nächstgrößere Art, und setze zu diesem Produkte die vorhin gefundenen Arten. Verfähret man mit den übrigen Arten eben so, so findet man das verlangte Produkt. Z. E.

3 rthlr. 6 gr. 4 pf.
6
18 rthlr. 36 gr. 24 pf.
19 rthlr. 14 gr. — pf.

§. 236.

Eine genannte Zahl dividiret man durch eine ganze Zahl, wenn man mit der Division bey der größten Art anfängt. Sollte hier ein Rest bleiben, so bringe man ihn auf den nächst kleinern Namen, und addire solchen zur nächst kleinern Art. Auf diese Weise verfahre man mit den übrigen Arten. Z. E.

12 rthlr.

12 rthlr. 16 gr. 8 pf. (2 rthlr. 12 gr. $11\frac{1}{5}$ pf.

5 — 48 — 48

10 — 64 — 56

2 — 5 — 55

24 — 14 — (1)

48 — 10

4

12

48

§. 237.

Diejenige Regel, nach welcher zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl gesuchet wird, heißt in der Ausübung die Regel Detri oder güldne Regel. Sie findet ihre Anwendung bey der Kauf- und Waarenrechnung, Zinsenrechnung, Gesellschafts Vermischungs- und Alligationsrechnung u. s. Um aber vortheilhaft zu rechnen kann man untersuchen, ob die erste und zweyte oder die erste und dritte Zahl ein gemeinschaftliches Maas haben. Findet dieses statt, so dividire man mit diesem gemeinen Maaße, und gebrauche in der Rechnung die daher entstandenen Quotienten statt der gegebenen Zahlen: Sollten Brüche mit in Ansatz kommen, so suche man diese ganz wegzuschaffen. Gewöhnlicher Maassen ist bey Fällen, welche zur Regel Detri gehören, eine Zahl mit einem Fragworte verbunden, und welche die Fragzahl genennet wird, alsdenn ist noch eine vorhanden, welche mit der Fragzahl von einerley Art ist, und die dritte ist mit der zu suchenden von einerley Art. Z. E. 14 ℔. kosten 3 rthlr. wie viel kosten 97 ℔?

Der

Der Ansatz solcher Aufgaben geschiehet nun folgender Maassen: Man setze die Fragzahl in die zweyte Stelle, welche mit ihr von einerley Art ist, in die erste, und welche mit der zu suchenden von einerley Art ist, in die dritte Stelle; das vorige Beyspiel würde also folgenden Ansatz erhalten:

14 ℔ : 97 ℔ = 3 rthlr. : $20\frac{11}{14}$ rthlr.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 291 \\ 14 \\ \hline 28 \\ \hline 11 \end{array} \Big(20\tfrac{11}{14} \text{ rthlr.}$$

Weil aber während der Rechnung die Zahlen als ungenannte Zahlen betrachtet werden, so kann man auch den Ansatz so machen, wie man gewöhnlich die Frage ausspricht, wie

14 ℔ : 3 rthlr = 97 ℔ : $20\frac{11}{14}$ rthlr.

§. 238.

Alle Reduktionen der mancherley Maasse und Gewichte auf anderes Maas und Gewichte gehören hieher. Damit man aber die Reduktionszahl wiße sind Vergleichungstafel nöthig. Ist die Reduktionszahl ein Bruch, so ist man im Stande, daraus einen Ausdruck herzuleiten, welcher angiebt, wie viel Stücke der einen Art genommen werden müßen damit sie den Stücken der andern Art gleich werden, und welcher der Reduktionssatz gennennet wird. Weiß man z. E. daß $\frac{5}{6}$ Ellen Brab. = 1 Elle Hamburg. so sind 5 Brab. Ellen = 6 Hamb. und das ist der Reduktionssatz. Will man nun wißen, wie

viel

viel 36 Braban. Ellen Hamburger Ellen ausmachen, so ist der Ansatz:

$$5 : 36 = 6 :$$

$$\frac{6}{\frac{216}{\frac{5}{\frac{20}{\frac{16}{\frac{15}{(1)}}}}}} \left(43\tfrac{1}{5} \text{ Elle Hamb.}\right.$$

§. 239.

Es giebt eine Menge Rechnungsfragen, wo man die Fragezahl nicht in die zweyte Stelle setzen kann, wenn man ein richtiges Facit haben will. Die Bedingungen einer Aufgabe geben allemal zu erkennen, ob die gesuchte Zahl größer oder kleiner seyn müße, als die gegebene Zahl, welche mit ihr von einerley Art ist. Ist das erste, so kommt die kleinere gegebene Zahl, welche mit der andern gegebenen gleichartig ist, in die erste Stelle; ist aber das zweyte so muß die größere gegebene Zahl, welche mit der andern gegebenen von einerley Art ist, in die erste Stelle kommen. Z. E. Wenn man zu einem Kleide $4\frac{1}{2}$ Tuch à 2 Elle breit brauchet, wie viel Futter muß man dazu haben, wenn es $1\frac{1}{5}$ Elle breit liegt? Ehe man den Ansatz solcher Rechnungsfragen macht, ist es vortheilhaft, zu untersuchen, ob man fragen könne: je größer oder je kleiner die Fragzahl ist, desto größer oder kleiner muß die gesuchte Zahl seyn und wenn dies geschehen kann, so gehören solche Rechnungsfragen zur ordentlichen Regel Detri; kann

man

man aber sagen; je größer oder je kleiner die Fragzahl, desto kleiner oder desto größer ist die gesuchte Zahl, so muß in solchen Fällen die Fragzahl allemal in die erste Stelle kommen, und man rechnet sie zur umgekehrten Regel Detri. Der Ansatz des vorigen Beyspiels würde also seyn

$1\frac{1}{3}$ Ellen : 2 Ellen = $4\frac{1}{2}$ Ellen oder
$\frac{4}{3}$: 2 = $\frac{9}{2}$ oder
8 : 6 = 9 oder
4 : 3 = 9

$$\frac{3}{27}\Big(6\tfrac{3}{4}\text{ Ellen.}$$
4

§. 240.

Oefters ereignet sich der Fall, daß gewiße Personen gemeinschaftliche Handelsgeschäfte unternehmen, um gemeinschaftlichen Gewinn daraus zu ziehen, oder gemeinschaftlich zu verlieren. Alsdenn ist es billig, daß ein jeder nach Verhältniß der Einlage von dem Gewinn erhalte oder von dem Verlust trage. Dieses bestimmt nun die Gesellschaftsregel (regula societatis). Man addiret nemlich aller Einlagen, und spricht wie sich verhält die Summe aller Einlagen zu eines jeden Einlage, also verhält sich auch der Gewinn oder Verlust zu eines jeden Gewinn oder Verlust.

§. 241.

Bey Vermischung gewißer Maßen, die eine Vermischung leiden, kommt es vorzüglich auf den Satz an, der jederman deutlich ist: der Werth oder der

Gehalt

Gehalt, welchen die vermischte Maße bekommt, ist so groß, als der Werth oder Gehalt aller Theile, welche in die Vermischung kommen. Besitzt z. E. jemand zerley Sorten Weine, 1 Kanne á 18 gr. 1 Kanne à 12 gr. und 1 Kanne à 6 gr. vermischt er nun diese Sorten so, daß er von der erstern 3, von der andern 5 und von der dritten 2 Kannen nimmt so ist der Werth.

von 3 Kannen à 18 gr. = 54 gr.
von 5 Kannen à 12 gr. = 60 gr.
von 2 Kannen à 6 gr. = 12 gr.
also von 10 Kannen des Gemischten = 126 gr.

Wenn gewiße Maßen von verschiedenem Werthe oder Gehalte mit einander vermischt werden sollen, so kann man hier zweyerley Fälle unterscheiden. Man verlangt nemlich entweder den Werth oder Gehalt des Vermischten, oder man will einen bestimmten mittlern Werth oder Gehalt haben. Rechnungsaufgaben der ersten Art gehören zur Vermischungsregel (regula mixtionis) und der andern Art zur Alligationsregel (regula alligationis). Beyde Regeln werden in der mehresten praktischen Rechenbüchern nicht gehörig von einander unterschieden, gemeiniglich werden sie für einerley gehalten. Allein sie sind vorzüglich hierinn von einander unterschieden, daß bey der erstern nemlich bey der regula mixtionis das Verhältniß der Theile, die in die Vermischung kommen, schon bekannt ist, da es erst bey der letztern gesucht werden muß. Die Regeln, welche bey der regula mixtionis in Anwendung kommen, sind mit den Regeln der Gesellschaftsregel völlig einerley.

§. 242.

Man nehme 2 Maßen A und B: die erstere A sey vom beßern und die andere B vom geringern Werthe oder Gehalte, man setze nemlich 1. Stück z. E. 1 Kanne 1 Mark u. d. g. von A sey a werth und 1 Stück von B sey b werth. Gesetzt nun, es müßten x Stücke von A und y Stücke von B genommen werden, um eine Maße C vom mitleren Werthe, davon 1 Stück c werth wäre, zu erhalten. Man suche nun die Werthe beyder Theile, welche in die Vermischung kommen sollen; man findet sie mittelst der Regel Detri auf folgende Art

1 Stck. v. A: deßen Werth a = x Stücke v. A: ax

und

1 Stck. v. B: deßen Werthe b = y Stücke v. B: by

Wenn nun x Stücke von A und y Stücke von B zusammen vermischt werden, so besteht die Mischung aus (x + y) Stücken von C. Auch hiervon suche man den Werth

1 Stück v. C: deßen Werth c = (x + y) Stücke

von C: c (x + y).

Dieser Werth oder Gehalt muß nun so groß seyn, als die Werthe der vermischten Theile zusammengenommen, oder

$$c(x+y) = ax + by \text{ oder}$$
$$cx + cy = ax + by \text{ und}$$
$$(c-b)y = (a-c)x \text{ d. h.}$$
$$(c-b):(a-c) = x:y \text{ (§. 176). d. h.}$$

zu (c — b) Stücke von A müßen (a — c) Stücke von B genommen werden, um die Maße C zu erhalten, wovon 1 Stück c werth ist. Z. E. Es hat jemand 15 löthiges und 10 löthiges Silber, er will

gern

gern 12 löthiges haben wie viel Mark wird er von jeder der beyden vorräthigen Sorten nehmen müßen. Hier ist 15 = a, 10 = b und 12 = c, mithin muß man von dem 15 löth. (12 — 10) Mark und von dem 10 löth. (15 — 12) Mark nehmen, um 12 löth. zu erhalten.

Probe

2 Mark 15 löth. Silb. hält fein 2 × 15 = 30 Loth
3 Mark 10 löth. — — — 3 × 10 = 30 Loth
also 5 Mark des gemischten — — 60 Loth
und 1 Mark — — — $\frac{60}{5}$ 12 = Loth. fein.

Hieraus fließen nun folgende Regeln: 1. man schreibe den schlechtern Werth oder Gehalt unter den beßern, und den verlangten mittlern zwischen beyde gegen die Linke; darauf 2. subtrahire man den schlechtern von dem mittleren, und den mittlern von dem beßern, die erste Differenz giebt an, wie viel von dem beßern, und die zweyte, wie viel von dem schlechtern zu nehmen ist.

§. 243.

Sobald das Verhältniß der Theile bekannt ist, welche in die Vermischung kommen sollen, so ist es alsdenn überaus leicht nach der regula mixtionis eine bestimmte Menge von einer solchen vermischten Maße zu finden, deren Theile das nemliche Verhältniß unter sich haben. Z. E. Es sollen zweyerley Sorten Wein, wovon 1 Kanne der einen Sorte 20 gr. und die Kanne der andern 6 gr. kostet, also mit einander vermischen, daß die Kanne in der Vermischung 12 gr. koste, so findet man nach der Alligationsregel

12 gr.	20 gr.	6 Kannen
	6 gr.	8 Kannen

Wollte man nun z. E. 40 Kannen von gemischten Weine haben, so daß jede Kanne 12. gr. koste, so findet man nach der regula mixtionis

14 : 6 = 40 oder
7 : 6 = 20

6

120 ($17\frac{1}{7}$ Kanne à 20 gr.
7

50

7

49

(1)

14 : 8 = 40 : oder
7 : 4 = 40

4

160 ($22\frac{6}{7}$ Kannen à 6 gr.
7

14

20

14

(6)

Es sey nun $17\frac{1}{7}$ = x und $22\frac{6}{7}$ = y, so ist 20x + 6y = 40 × 12 und x + y = 40. Hieraus sieht man, daß es vorzüglich darauf ankomme, die Zahl 40 in 2 Theile zu theilen, wovon der eine x mit 20 und der andere y mit 6 multipliciret Produkte entstehen deren Summe der gegebenen Zahl 40 × 12 gleich werde. Um es allgemeiner zu zeigen, welche Regeln hier in Anwendung kommen

müßen,

müßen, setze man 20 = a, 6 = b, 40 = m und 40 ⋈ 12 = f, so ergiebt sich 1) ax + by = f und 2) x + y = m; dies ist also ein Beyspiel von einer so genannten bestimmten Aufgabe. Nun findet man x = m − y, also a (m − y) + by = f oder am − ay + by = f oder (b − a) y = f − am und daher y = $\frac{f - am}{b - a}$ mithin y = $\frac{480 - 800}{6 - 20}$ = $\frac{-320}{-14}$ = $22\frac{6}{7}$ Kannen und x = 40 − $22\frac{6}{7}$ Kannen. Man findet daher eben die Resultate auf einem ganz andern Wege. Soll aber eine gegebene Zahl in mehr als drey Theile getheilet werden, so daß, wenn man einen jeden Theil mit einem besondern gegebenen Faktor multipliciret, die Summe dieser Produkte gleich einer andern gegebenen Zahl werde, so können hier viele Auflösungen statt haben, welche dem Verlangten eine Genüge leisten. z. E. es ist 15. löth. 13 löth. und 10 löth. Silber vorhanden, man will 30 Mark 12 löthiges haben, wie viel Mark wird von jeder Sorte zu nehmen seyn? Hieraus sieht man, daß die Zahl 30 in 3 Theile zu theilen, wovon der eine mit 15, der andere mit 13 und der dritte mit 10 multipliciret die Summe dieser Produkte gleich 30 ⋈ 12 werde. Demnach setze man x + y + Z = 30 und 15x + 13y + 10Z = 30 ⋈ 12. und man findet x = 30 − y − Z, mithin 15 (30 − y − Z) + 3y + 10Z = 30 ⋈ 12 oder 450 − 15y − 15Z + 3y + 10Z = 30 ⋈ 12 oder 450 − 12y − 5Z = 30 ⋈ 12 oder 12y = 450 − 360 − 5Z und y = $\frac{90 - 5Z}{12}$. Hier hat man also ein Beyspiel von einer sogenannten unbestimm-

ten Aufgabe. Nimmt man nun für Z andere und andere Werthe an, so wird man allemal das Verlangte richtig finden. Es sey z. E. $Z = 13$, so findet man $y = \frac{90 - 65}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$ Mark mithin $x = 30 - 2\frac{1}{12} - 13 = 14\frac{11}{12}$. Dieses Beyspiel zeuget deutlich, daß, wenn der eine Theil als eine ganze Zahl angenommen wird, es eben nicht nothwendig sey, daß die übrigen Theile auch ganze Zahlen werden. Würde aber vorausgesetzet, daß die übrigen Theile auch ganze Zahlen seyn sollten, so giebt hiervon die sogenannte **Regel Cöci** oder **blinde Rechnung** Unterricht.

§. 244.

Wenn gewiße Capitalia auf Zins ausgeliehen werden, so hat man vorzüglich zwey folgende Sätze zu merken 1. Wenn die Capitalien gleich sind, so verhalten sich die Zinsen wie die Zeiten, und 2. wenn die Zeiten gleich sind, die Zinsen wie die Capitalien. Bekommt man z. E. in einem Jahre von 100 rthlr. 5 rthlr. Zins so erhält man von eben den 00 rthlr. nach 2 Jahren 10 rthlr. wenn die 5 rthlr. Zins nach dem ersten Jahre nicht bezahlet worden u. s. Demnach wächst ein Capital, zu welchem jährlich die Zinsen kommen, in arithmetischer Progression. So ist

100 nach 1 Jahre $100 + 5$
— — 2 Jahren $100 + 10$
— — 3 Jahren $100 + 15$
— — n Jahren $100 + 5n$

Da nun hierdurch gefunden wird, wie viel ein zinsbares Capital nach einer gewißen Zeit angewachsen ist, so läßt sich auch umgekehrt leicht bestimmen, um wie viel ein Kapital, welches schon durch Zins vermehret worden, vor einer gewißen Zeit kleiner gewesen sey. So waren vor einem Jahre 105 rthlr. so viel als 100 rthlr. vor 2 Jahren 110 rthlr. so viel als 100 und überhaupt vor n Jahren $100 + 5n$ so viel als 100. Gesetzt nun, es wäre ein Schuldner einem Gläubiger nach 1 Jahre 400 rthlr zu 5 p. C. zu zahlen schuldig, er entschließt sich aber, diese Schuld sogleich zu bezahlen, so kann man schließen

105 rthlr. waren vor einem Jahre 100 rthlr. wie viel waren 400 rthlr. und man findet nach der Regel Detri $105 : 100 = 400$ oder

$$21 : 20 = 400$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 8000 \\ 21 \\ \hline 63 \end{array} \left(\begin{array}{l} 380\frac{20}{21} \text{ rth.} \\ \\ \\ \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} 170 \\ 168 \\ \hline (20) \end{array}$$

Er bezahlt also statt 400 rthlr. nach einem Jahre sogleich $380\frac{20}{21}$ rthlr. demnach zieht er $19\frac{1}{21}$ rthlr. ab. Ein solcher Abzug, welcher wegen der frühern Zahlung geschieht, wird der Rabatt oder in den Rechten das Interusurium genannt. Man setze ferner, es sey jemand eine Summe Geldes $= S$ nach n Jahren mit a p. C. zu zahlen schuldig, das jetzt baar zu bezahlende Capital sey y. Nun suche man, wie groß y nach n Jahren angewachsen ist, und man findet nach der Regel Detri

$100 : (100 + an) = y : \frac{y(100 + an)}{100} = y + \frac{any}{100}$

und dieses soll $= s$ seyn. Aus

$s = y + \frac{any}{100}$ oder $s = y\left(1 + \frac{an}{100}\right)$ ergiebt sich

$100s = y(100 + an)$ und daher

$(100 + an) : 100 = s : y$. (§. 176.)

Hieraus fließen nun unmittelbar die Regeln, welche bey der Rabatrechnung statt haben 1. Man multiplicire die gegebene Zeit mit der Zinse, welche jährlich von 100 gegeben werden, und addire dieses Produkt zu 100. 2. Diese Summe nehme man als das erste Glied, und seze in die zweyte Stelle 100, in die dritte aber die gegebene ganze Schuld, und verfahre mit diesen dreyen Zahlen, wie bey der Regel Detri, das Facit ist das zu bezahlende baare Capital. Die Differenz des baaren und des wahren Capitals ist der Rabat.

§. 245.

Nimmt man die zweyte Voraussetzung an, daß nemlich die Zeiten gleich sind, so läßt sich der Zins von einem Capital nach der Regel Detri sehr leicht finden. Z. E. wie viel Zins erhält man von 500 rthlr. wenn 5. p. C. gegeben werden, so ist der Ansatz

$100 : 500 = 5 :$ oder

$1 : 5 = 5 : 25$.

Würde nun dieser Zins wieder zum ganzen Capital geschlagen, und samt diesen verzinset, so nennt man dieses Zins von Zins. Man nehme an, es wären die 500 rthlr. zu 5 p. C. ausgeliehen, es würde gefragt, wie groß das Kapital nach 5 Jahren

ren angewachsen, wenn Zins von Zins gegeben wird? Nach der Regel Detri findet man nun $100 : 105 = 500 : \frac{105}{100} \cdot 500$. Nun kann man wieder für das zweyte Jahr setzen

$$100 : 105 = \frac{105}{100} \cdot 500 : \frac{105}{100} \cdot \frac{105}{100} \cdot 500 \text{ oder}$$

$\left(\frac{105}{100}\right)^2 \cdot 500$; eben so einleuchtend ist es nun daß das angewachsene Capital nach 5 Jahren seyn werde

$$\left(\frac{105}{100}\right)^5 \cdot 500 = \left(\frac{21}{20}\right)^5 \cdot 500.$$

§. 246.

Es kommen noch viele Rechnungsfragen vor, bey welchen mehr als eine Fragzahl gegeben worden, und welche zur zusammengesetzten Regel Detri gehören: z. E. Wie viel Zins wird man von 540 Thlr. in 8 Monathen erhalten, wenn 5 p. C. gegeben werden? Man kann nun 1. sagen 100 Thlr. geben in 1 Jahre 5 Thlr. wie viel geben 540 Thlr. in 1 Jahre, und man findet 27 Thlr. 2. kann man nun setzen 1 Jahr : 8 Monath = 27 Thlr. oder 12 Mon. : 8 Mon. = 27 oder

3 . : 2 = 27

2

54 (18 Thlr.
33

Man setze 100 = a, 12 Mon. = b, 540 = c und 8 = d und 5 = e, so hat man

a : c = e : x und
b : d = x : y also
a,b. : cd = e : y oder
12.100 : 540.8 = 5 : y

Hieraus sieht man nun deutlich, daß sich solche Fälle, welche zur zusammengesetzten Regel Detri gehören, in einen einzigen Ansatz zusammenziehen lassen. Man setze nemlich die Fragzahlen in die zweyte Stelle, und diejenigen, welche mit ihnen von einerley Art sind, in die erste, und diejenige, welche mit der zu suchenden von einerley Art ist, in die dritte Stelle. Darauf multiplicire man sowohl alle Fragzahlen, als auch die Zahlen in der ersten Stelle in einander, da man sodann 3 Zahlen erhält, mit welchen eben so verfahren wird, wie bey der ordentlichen Regel Detri.

§. 247.

Es giebt noch eine andere Art hieher gehöriger Rechnungsaufgaben, welche zwar zur zusammengesetzten Regel Detri gehören, wo aber nur eine einzige Fragzahl vorkommt. Die Verhältnisse derselben sind gleichsam kettenweise mit einander verbunden, und aus diesem Grunde heißt auch die Regel, welche solche Aufgaben aufzulösen lehret, die **Kettenregel** (regula multiplex). Z. E. wenn 6 Hamb. Ellen = 5 Brab. Ellen, 8 Hamb. Ellen aber 5 Gulden kosten, 3 Gulden 2 Thlr. machen, so fragt es sich, wie viel Thlr. bezahlt man vor 24 Br. Ellen? Wenn man die Natur der Rechnungsfrage untersuchet, so sieht man leicht, daß man 1. fragen könne 6 Ellen Hamb. = 5 Brab. wie viel

machen

machen 24 Brab. Ellen nach Hamb. und man findet $5 : 24 = 6$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 144 \left(28\tfrac{4}{5} \text{ Ellen.} \right. \\ 5 \\ \hline 10 \\ \hline 44 \\ 40 \\ \hline (4) \end{array}$$

2. Kann man fragen wie viel kosten $28\frac{4}{5}$ Ellen Hamb., wenn 8 Hamb. Ell. 5 Gulden kosten, und man erhält $8 : 5 = 28\frac{4}{5}$

$$\begin{array}{r} \\ \hline 144 \left(18 \text{ Gulden.} \right. \\ 8 \\ \hline 64 \end{array}$$

3. Endlich kann man noch fragen, wie viel Thlr. betragen 18 Gulden, wenn 3 Gulden 2 Thlr. machen, und es ergiebt sich

$3 : 2 = 18$ oder $1 : 2 = 6 : 12$ Thlr.

mithin kosten nach den vorausgesetzten Bedingungen 24 Ellen Brab. 12 Thlr.

Man setze nun 6 Ell. Hamb. $=$ a, 5 Ellen Brab. $=$ b, 24 Ellen Brab. $=$ c, 8 Ell. Hamb. $=$ d, 5 Guld. $=$ e, 3 Guld. $=$ f und 2 Thlr. $=$ g, so kann man die Verhältniße sogleich folgender Maaßen übersehen

$$\begin{array}{rcrcl} b & : & c & = & a : x \\ d & : & e & = & x : y \\ f & : & g & = & y : z \text{ mithin} \end{array}$$

$$\overline{b.d.f : ceg = a : z.}$$

Hieraus sieht man aber deutlich, daß man Rechnungsaufgaben, welche

che zur sogenannten Kettenregel gehören, vortheilhaft in einem einzigen Ansatz zusammenziehen kann, und daß folgende Regeln in Anwendung kommen: man setze die Fragzahl rechter Hand oben an, welche mit ihr von einerley Art ist linker Hand, und welche mit dieser verbunden rechter Hand unter die Fragzahl. Abermals setze man zur Linken diejenige Zahl, welche mit der nächstvorhergehenden zur Rechten geschriebenen Zahl gleichartig ist, und zur Rechten diejenige, welche mit ihr verbunden ist. Auf diese Weise fahre man fort, bis man zulezt zur Rechten auf eine Zahl kömmt, welche mit der suchenden Zahl von einerley Art ist. Nun multiplicire man die Zahlen in jeder Columne für sich, und dividire mit dem Produkte linker Hand das Produkt zur Rechten, der Quotiente ist das verlangte Facit. Das vorige Beispiel würde also folgenden Ansatz erhalten

Wie viel Thlr. kosten 24 Brab. Ellen

wenn 5 Brab.	=	6 Hamb.
8 Hamb.	=	5 Gulden.
3 Guld.	=	2 Thlr.

24 — 144
5 — 5
120 — 720
2
1440 (12 Thlr. Facit.
120
24
0

§. 248.

§. 248.

Wenn in gewißen Terminen verschiedene Gelder bezahlet werden sollen, so kann gefraget werden, ob nicht die Zahlung zu gleicher Zeit auf einmal ohne Nachtheil des Gläubigers und des Schuldners geschehen kann? Diese Zeit zu finden lehret die so genannte Zeitrechnung (terminorum reductio). Man setze z. E. der Schuldner A sey dem Gläubiger B folgende Posten a, b und c mit e p. C. zu zahlen schuldig, und zwar die erste nach m Zeit, die andere nach n Zeit und die dritte nach o Zeit, und es sey $a + b + c = S$ so findet man 1) den Zins von dem Kapital a nach folgenden Ansatze

$$100 : m = e : \frac{am}{100} \cdot e$$

2) den Zins von b, $100 : n = e : \frac{bn}{100} \cdot e$

3) den Zins von c, $100 : o = e : \frac{co}{100} \cdot e$ mithin der Zins von allen Posten oder von $S =$

$$\left(\frac{am + bn + co}{100}\right)e.$$

Nun suche man die Zeit, wie lange das Kapital S ausstehen muß, um diesen verlangten Zins zu erhalten. Die Kapitalien sind hier in einem verkehrten Verhältniße, weil man sagen kann ein größer Kapital erfordert wenigere Zeit, einen verlangten Zins hervorzubringen, demnach hat man

$$S : 100$$
$$e \left(\frac{am + bn + co}{100}\right) = 1 : \text{Facit, welches} =$$

$$\frac{(am + bn + co)\ 100.e}{100, eS} = \frac{am + bn + co}{S}$$

Hieraus

Hieraus fließen nun unmittelbar diejenigen Regeln, welche man bey Auflösung solcher Aufgaben anzuwenden hat. 1. Man schreibe dasjenige, was zu verschiedenen Zeiten zu leisten ist, unter einander, und neben jedes die Zeit, doch müssen die Zeiten auf einerley Nahmen gebracht seyn. 2. Multiplicire man das zu leistende mit seiner Zeit, und setze die Produkte zur Rechten in eben der Linie. 3. Darauf addire man alles, was zu verschiedenen Zeiten zu leisten ist, und dividire die Summe dieser Produkte durch jene Summe, der Quotient ist die gesuchte Zeit. Es sey z. E. a = 400 Rthlr. b = 300 Rthlr. c = 200 Rthlr. m = 2 Jahr, n = 1 Jahr und o = 4 Monathe, so hat man

400 × 24 = 10600
300 × 12 = 3600
200 × 4 = 800

900 — 15000 (16 $\frac{2}{3}$ Monath als d. Facit.
— 9 00
60
9
54

Sechstes Kapitel.
Von den Funktionen.

§. 249.
Erklärung.

Bey Auflösung mathematischer Aufgaben kommen oft Größen in Betrachtung, denen man keinen bestim-

bestimmten Werth beyleget, sondern man sucht blos das Gesetz, nach welchen sie wachsen oder abnehmen. Solche Größen nun, welche nach Gefallen wachsen und abnehmen können, heißen veränderliche Größen (quantitates variabiles), diejenigen Größen aber, welche den nemlichen Werth behalten, beständige Größen (quantitates constantes).

§. 250.

Zusatz.

Eine veränderliche Größe begreift alle Zahlen ohne Unterschied in sich, sie mögen ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, positive oder negative, mögliche oder unmögliche u. s. seyn.

§. 251.

Erklärung.

Eine veränderliche Größe **wächst unendlich**, wenn sie größere und größere Werthe bekommt. Sie kann aber nie so groß wachsen, daß sie gar keine Gränze mehr hätte, oder welches einerley, sie kann nie **unendlich groß** werden. Jedoch kann man sich die Vorstellung von einer Gränze machen, mit welcher sie zu wachsen aufhören müßte, und dies ist eben das, was man in der Mathematik eine **unendlich große Größe** nennt. Um eine unendlich große Größe anzuzeigen, bedienet man sich des Zeichens ∞.

Anmerk. Man pflegt die veränderlichen Größen durch die letzten Buchstaben x, y, z, und die be-

beständigen durch die ersten Buchstaben a, b, c u. s. auszudrucken.

§. 252.

Lehrsatz.

Wenn der Zähler des Bruchs eine beständige Größe, der Nenner aber veränderlich, so wird der Bruch $= 0$, wenn der Nenner $= \infty$ wird.

Beweis.

Wenn der Zähler des Bruchs immer einerley Werth behält, der Nenner aber beständig größer und größer wird, so wird der Bruch immer kleiner und kleiner. Wenn also der Nenner des Bruchs unendlich wächst, so muß der Bruch unendlich abnehmen. Wird endlich der Nenner $= \infty$, so muß der Bruch eine Gränze erreichen, womit er weiter nicht abnehmen kann d. h. er muß $= 0$ werden.

§. 253.

Erklärung.

Wenn die Werthe einer veränderlichen Größe immer kleiner und kleiner werden, so kann man sich 0 als die Gränze vorstellen, welcher sie sich ohne Aufhören nähert, ob sie gleich selbige nie erreicht, so lange sie noch eine Größe ist, die sich angeben läßt, wie klein sie auch sey, und eben die Gränze, womit die Größe aufhöret eine Größe zu seyn oder verschwindet, ist eben das, was man eine unendlich kleine Größe nennt.

§. 254.

Lehrsatz.

Wenn der Zähler eines Bruchs beständig, der Nenner aber veränderlich, so wird der Bruch $= \infty$, wenn der Nenner $= 0$ wird.

Beweis.

Wenn der Zähler des Bruchs immer einerley bleibt, der Nenner aber kleiner wird, so muß der Bruch beständig größer werden. Verschwindet endlich der Nenner, so muß der Bruch eine Gränze erreichen, womit er zu wachsen aufhöret d. h. er muß $= \infty$ werden.

§. 255.

Erklärung.

Ein jeder Ausdruck, in welchem eine veränderliche Größe mit beständigen Größen auf welche Art man will verbunden ist, heißt eine **Funktion** der veränderlichen Größe z. E. $ax + b$; $\sqrt{xa - bc}$; $\frac{ab - x}{c}$ sind lauter Funktionen von x.

Anmerk. Wenn ein zinsbares Kapitel S zu a p. C. ausgeliehen ist, so muß der Zins davon immer andere und andere Werthe bekommen, wenn die Zeit $= x$ eine Aenderung leidet. Denn je größer die Zeit x ist, desto größer ist der Zins, und umgekehrt, je kleiner die Zeit, desto kleiner ist auch der Zins. Man kann also hier die Zeit als eine veränderliche Größe betrachten, und es wird alsdenn der allgemeine Ausdruck $\frac{Sax}{100}$ eine Funktion von x.

§. 256.

Zusatz.

Die Funktion einer veränderlichen Größe ist selbst eine veränderliche Größe.

§. 257.

Erklärung.

Wenn zwischen einer veränderlichen Größe y und einer Funktion von x eine Gleichung gegeben worden, wie $y = ax - b$, so heißt y eine Funktion von x.

§. 258.

Erklärung.

Man theilet die Funktionen in **ganze** und **gebrochene**, **rationale** und **irrationale**, **homogene** und **heterogene** ein. Eine ganze Funktion heißt diejenige, welche keine veränderliche Größe im Nennor oder Divisor hat, eine gebrochene aber, die einen solchen hat. Eine rativnale Funktion heißt diejenige, worinn keine veränderliche Größe ein Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten bey sich führet, eine irrationale aber, welche dergleichen bey sich hat. Eine homogene Funktion wird diejenige genennt, wo in jedem Gliede die Anzahl der veränderlichen Faktoren gleich groß ist, eine heterogene aber, wo dis nicht statt hat, und im letzten Falle wird der Grad der Funktion von der grösten Anzahl der veränderlichen Faktoren in einem Gliede gerechnet.

§. 259.

§. 259.

Zusatz.

Die allgemeine Formel einer ganzen rationalen Funktion einer einzigen veränderlichen Größe x ist $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ u. f. denn es läßt sich keine ganze rationale Funktion von x gedenken, welche nicht unter diese Form gebracht werden könnte. So erhält z. E. die Funktion $\frac{Sax}{100}$ (§. 255.), die allgemeine Form $0 + \frac{Sa}{100}x + 0x^2 + 0x^3 +$ u. f.

Die allgemeine Formel einer gebrochenen rationalen Funktion einer einzigen veränderlichen Größe ist

$$\frac{\alpha + bx + cx^2 + dx^3 + \text{u. f.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{u. f.}}$$

wo die beständigen Größen a, b, c, d u. f. α, β, γ u. f. ganze und gebrochene, rationale und irrationale, reelle und imaginaire Größen bedeuten können.

§. 260.

Zusatz.

Die allgemeine Formel einer heterogenen Funktion von zweyen veränderlichen Größen ist $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + hx^3$ u. f. welche alle homogene Funktionen von x und y in sich begreift. Denn es ist die Funktion

von einer Dimension
$bx + cy$
von zweyen Dimensionen
$dx^2 + exy + fy^2$ u. f.

§. 261.

Erklärung.

Wenn der Unterschied einer Größe von einem Werthe kleiner als jede noch so kleine Größe wird, so sagt man, jene Größe nähere sich diesem Werthe unendlich, da alsdenn dieser Werth die Gränze der Größe genennet wird. So ist $\sqrt{2}$ die Gränze von 1,4 oder 1,41 oder 1,414 oder 1,4142 u. s. Eben so nennt man auch ein Verhältniß, welchem sich ein anderes unendlich nähert, die Gränze dieses andern Verhältnißes (limes rationis). So ist $\sqrt{2}:\sqrt{5}$ die Gränze des Verhältnißes 1,4:2,2 oder 1,41:2,23 oder 1,414: 2,236 oder 1,4142:2,2360 u. s.

§. 262.

Zusatz.

Wenn $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ u. s. oder eine ganze rationale Funktion von x, und die beständige Größe $a = o$, so ist alsdenn $y = bx + cx^2 + dx^3 +$ u. s. mithin $\frac{y}{x} = b + cx + dx^2 +$ u. s. folglich ist das Verhältniß $y:x$ ein veränderliches Verhältniß, welches immer abnehmen muß, wenn x kleinere und kleinere Werthe erhält. Es sey z. E. $y = 3x - 4x^3$ so hat man $\frac{y}{x} = 3 - 4x^2$.

§. 263.

Zusatz.

Verschwindet x oder wird $= o$, so wird auch $y = o$, und $\frac{y}{x} = \frac{b}{1} = \frac{o}{o}$. Demnach ist b:1

die

die Gränze, welcher sich das Verhältniß y : x beständig nähert, solches aber nie erreichet, so lange y und x bestimmte Werthe besitzen. Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ zeigt hier keinesweges, daß er $= 0$ sey, sondern er deutet nur an, daß das Verhältniß y : x keinen bestimmten Werth, sondern unzählig viele habe. Es sey z. E. (§. 255. Anmerk.) $y = \frac{Sax}{100}$; verschwindet die Zeit x, so ist alsdenn $\frac{y}{x} = \frac{Sa}{100} = \frac{0}{0}$ d. h. die Werthe y und x mögen seyn welche sie wollen, so bleibt y und x immer in dem Verhältnisse Sa : 100, wenn auch y und x verschwinden.

§. 234.

Lehrsatz.

Wenn y und z ganze rationale oder irrationale Funktionen von x sind, und der Exponent der niedrigsten Potenz in der Funktion y gleich dem Exponenten in der Funktion z, so ist die Gränze des Verhältnißes y : z ein beständiges Verhältniß, wenn x verschwindet.

Ist aber der Exponent der niedrigsten Potenz in der Funktion y größer als der Exponent der niedrigsten Potenz in der Funktion z, so wird y : z ein veränderliches Verhältniß, und wenn x verschwindet, $= 0$.

Beweis.

Es sey $y = ax^h + bx^{h+i} + cx^{h+i+k} +$ u. s. und $z = \alpha x^h + \beta x^{h+m} + \gamma x^{h+m+n} +$ u. s. so sind

$\frac{y}{x^h}$

$\frac{y}{x^h} = \frac{a}{1}$ und $\frac{z}{x^h} = \frac{\alpha}{1}$, wenn x verschwindet. Weil $\frac{y}{x^h} = \frac{a}{1}$, $y : x^h = a : 1$, und $\frac{z}{x^h} = \frac{\alpha}{1}$, $x^h : Z = 1 : \alpha$, so folgt $y : z = a : \alpha$.

Es sey ferner $y = ax^{h+i} + bx^{h+i+k} +$ u. f. und $Z = \alpha x^h + \beta x^{h+m} +$ u. f. so hat man $\frac{y}{x^h} = \frac{ax^i}{1}$ und $\frac{Z}{x^h} = \frac{\alpha}{1}$ oder $\frac{V}{x^h} = \frac{0}{1}$, wenn x verschindet. Ferner hat man $y : x^h = 0 : 1$ und $x^h : Z = 1 : \alpha$, also auch $y : Z = 0 : \alpha$ oder $\frac{y}{Z} = \frac{0}{\alpha} = 0$.

§. 265.

Erklärung.

Es ist öfters bequem und nöthig, einer Funktion eine andere Gestalt zu geben. Mehrentheils geschiehet diese Verwandlung, wenn man aus der gegebenen Funktion eine Summe mehrerer Funktionen machet, oder sie in eine unendliche Reihe verwandelt. Um nun dieses zu bewerkstelligen, setze man die gegebene Funktion einer andern gleich, in welcher die Coefficienten der unbestimmten Größe noch unbekannt sind, bezeichne sie aber einstweilen mit den Buchstaben des großen lateinischen Alphabets. Diese Buchstaben werden nun die unbestimmten Coefficienten genennt.

§. 266.

§. 266.

Aufgabe.

Eine gegebene rationale gebrochene Funktion von x in eine Summe partieller Brüche aufzulösen.

Auflösung.

Man suche die einfachen Faktoren des Nenners und mache so viele Brüche als Faktoren sind gefunden worden. In den Zählern setze man die Buchstaben A, B, C u. s. als unbestimmte Coefficienten und gebe den Zählern die einfachen Faktoren des Nenners der gegebenen gebrochnen Funktion zu Nennern, darauf setze man die gegebene gebrochene Funktion den angenommenen partiellen Brüchen gleich, und bringe alles unter einerley Nenner. Nun vergleiche man die Coefficienten auf beyden Seiten, welche zur nemlichen Potenz von x gehören; so werden sich hieraus die unbestimmten Coefficienten bestimmen laßen. Z. E. Es sey die gegebene Funktion $\frac{4+5x}{-6+x+x^2}$. Die Faktoren des Nenners sind $x-2$ und $x+3$ (§. 215.), und es wird.

$$\frac{4+5x}{-6+x+x^2} = \frac{4+5x}{(x-2)(x+3)}.$$

Nun setze man $\frac{4+5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ oder

$4+5x = A(x+3) + B(x-2)$, oder

$4+5x = 3A + Ax$
$\quad -2B + Bx$ mithin

$4 = 3A - 2B$ und
$5 = A + B$ oder

$4 =$

$4 = 3A - 2B$
$14 = 3A + 3B$ also
$11 = 5B$ und $B = \frac{11}{5}$, demnach
$5 = A + \frac{11}{5}$, und $A = \frac{14}{5}$ und daher

$$\frac{4 + 5x}{-6 + x + x^2} = \frac{14}{5} + \frac{11}{5}x$$

§. 267.

Lehrsatz.

Wenn die Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ u. s. $= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ u. s. so müßen auch die Coefficienten der Glieder der einen Reihe den Coeficienten der Glieder der andern Reihe, welche einerley Potenzen von x bey sich führen, gleich groß seyn.

Beweis.

Weil die erste Reihe der andern gleich seyn soll, so muß auch $a + bx + cy^2 + dx^3$ u. s. $- A - Bx - Cx^2 - Dx^3 -$ u. s. $= 0$ seyn, oder

$$\begin{array}{l} a + b + c + d \\ -A - Bx - Cx^2 - Dx^3 \end{array}$$

u. s. $= 0$, also $a - A = 0$; $b - B = 0$; $c - C = 0$, demnach $a = A$, $b = B$, $c = C$ u. s. seyn.

§. 268.

Aufgabe.

Eine gegebene rationale oder irrationale gebrochene Funktion oder auch eine irrationale ganze Funktion von x in eine unendliche Reihe zu verwandeln.

Auflösung.

Man setze die gegebene Funktion der unendlichen Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ u. s. gleich,

multipli-

multiplicire alsdenn auf beyden Seiten mit dem Nenner der gebrochenen Funktion. Ist aber die gebrochene Funktion irrational so erhebe man zuvor die ganze Gleichung in eine Potenz, welche der Wurzelexponent anzeigt, und vergleiche sodann die beyderseitigen Coefficienten, welche mit gleichen Potenzen von x sind multipliciret worden. Z. E. Es sey $\frac{a}{b-x}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln. Man setze

$$\frac{a}{b-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{u. f. mith.}$$

$$a = A(b-x) + Bx(b-x) + Cx^2(b-x) + Ex^4(b-x) \text{ u. f.,}$$

oder $a = Ab - Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4$
$+ Bbx + Cbx^2 + Dbx^3 + Dbx^4$ u. f.

mithin $Ab = a$ und $A = \frac{a}{b}$

$Bb - A = o$ und $B = \frac{a}{b^2}$

$Cb - B = o$ und $C = \frac{a}{b^3}$

$Db - C = o$ und $D = \frac{a}{b^4}$

$Eb - D = o$ und $E = \frac{a}{b^5}$

also ist $\frac{a}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b^2}x + \frac{a}{b^3}x^2 + \frac{a}{b^4}x^3 + \frac{a}{b^5}x^4 +$ u. f.

Anmerk. Eben diese Reihe kann man auch mittelst der Division erhalten.

An. Bey. Es sey $\frac{1}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ gegeben. Man setze

$$\frac{1}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 \text{ u. f.}$$

und wenn man auf beyden Seiten quadrirt

$$\frac{1}{r^2-x^2} = \begin{array}{l} A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 \\ A + Bx^2 + Cx^4 + Cx^6 + Ex^8 \text{ u. f.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A^2 + ABx^2 + ACx^4 + ADx^6 + AEx^8 \text{ u. f.} \\ ABx^2 + B^2x^4 + BCx^6 + BDx^8 \text{ u. f.} \\ ACx^4 + BCx^6 + C^2x^8 \text{ u. f.} \\ ADx^6 + BDx^8 \text{ u. f.} \\ AEx^8 \text{ u. f.} \end{array}$$

$$\frac{1}{r^2-x^2} = A^2 + 2ABx^2 + \left.\begin{matrix} 2AB \\ B^2 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2AD \\ 2BC \end{matrix}\right\} x^6 +$$

$$\left.\begin{matrix} 2AE \\ 2BC \end{matrix}\right\} x^8 \text{ u. f.}$$

also

$$1 = A^2(r^2-x^2) + 2ABx^2(r^2-x^2) + \left.\begin{matrix} 2AC \\ B_2 \end{matrix}\right\} x^4$$

$$\left.\begin{matrix} 2AE \\ 2BD \\ C^2 \end{matrix}\right\} x^8$$

$$(r^2-x^2) + \left.\begin{matrix} 2AD \\ 2BC \end{matrix}\right\} x^6 (r^2-x^2) +$$

$$(r^2-x^2) + \text{u. f. oder}$$

$$\begin{array}{llll} 1 = A^2r^2 & -A^2x^2 & -2ABx^4 & -2ACx^6 \\ & & & -2ADx^8 \\ & +2ABr^2x^2 & +2ACr^2x^4 & -B^2x^6 \\ & & & -2BCx^8 \\ +B^2r^2x^4 & & & +2ADr^2x^6 \\ & & & +2AEr^2x^8 \\ & & & +2BDr^2x^8 \\ & & & +C^2r^2x^8 \\ & & & \text{u. f.} \end{array}$$

Dem.

Demnach erhält man folgende Gleichungen

$A^2r^2 = 1$

$-A^2 + 2ABr^2 = 0$

$-2AB + 2ACr^2 + B^2r^2 = 0$

$-2AC - B^2 + 2ADr^2 + 2BCr^2 = 0$

$-2AD - 2BC + 2AEr^2 + 2BDr^2 + C^2r^2 = 0$ u. f.

und man findet $A = \frac{1}{r} = r^{-1}$; $B = \frac{1}{2}r^{-3}$;

$C = \frac{3}{2.4}r^{-5}$; $D = \frac{3.5}{2.4.6}r^{-7}$; $E = \frac{3.5.7}{2.4.6.8}r^{-9}$

u. f.

also ist $\frac{1}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = r^{-1} + \frac{1}{2}r^{-3}x^2 + \frac{3}{2.4}r^{-5}x^4 +$

$\frac{3.5}{2.4.6}r^{-7}x^6 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8}r^{-9}x^8 +$ u. f.

Siebentes Kapitel.

Von der Differenzialrechnung.

§. 269.

Erklärung.

Wenn y eine Funktion von x, und x um ein unbestimmtes Stück wächset, so muß auch y um ein gewißes Stück wachsen. Man setze es werde aus y der veränderte Werth y^1, wenn x um das Stück ω zunimmt, so pflegt man den Unterschied von y^1 und y die Differenz der Funktion zu nennen. Um die Differenz einer Funktion anzuzeigen, gebrauchet man den griechischen Buchstaben Δ, und es wird $y^1 - y = \Delta y$ bezeichnet. Ist $y = x$, so wird $y^1 = y + \omega$ und $y^1 - y = x + \omega - x$ oder $\Delta y = \omega$, welches mit Δx bezeichnet wird, daß also $\Delta y = \Delta x$.

Anmerk.

Anmerk. Das unbestimmte Stück Δx kann so wohl positiv als negativ seyn. Demohngeachtet pflegt man es als einen Zuwachs zu betrachten, ob es gleich öfters eine Verminderung ist, welche aus dem negativen Werthe desselben erkannt wird. Z. E. In dem Ausdrucke (§. 255. Anm.) $\frac{Sax}{100}$ nehme die Zeit x um das Stück Δx zu, so verwandelt sich nun der Ausdruck in $\frac{Sa(x+\Delta x)}{100}$ $= \frac{Sax}{100} + \frac{Sa\Delta x}{100}$, und es ist die Differenz der Funktion $= \frac{Sa\Delta x}{100}$. Es sey $S = 500$ rthlr. $a = 5$ und $\Delta x = \frac{1}{4}$, so ist der Zuwachs, welchen der Zins $\frac{Sax}{100}$ erhält $= \frac{500 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4}}{100} =$ $\frac{625}{100} = 6\frac{1}{4}$ rthlr. Diese $6\frac{1}{4}$ rthlr. können nun so wohl positiv als negativ seyn, nachdem Δx als positiv oder als negativ angenommen worden.

§. 270.

Aufgabe.

Die Differenz von $x + y + Z$ zu finden.

Auflösung.

Man setze statt dieser Größen die veränderten Werthe derselben $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $Z + \Delta Z$, und subtrahire von dieser also veränderten Funktion die gegebene, so erhält man die Differenz derselben. Es ist nemlich:

$x + \Delta x$

$$\begin{array}{l} x+\Delta x+y+\Delta y+Z+\Delta Z \\ \text{sub. } x \quad +y \quad +Z \\ \hline \Delta x+\Delta y \quad +\Delta Z \end{array}$$

Beweis.

Es sey $Q = x+y+Z$. Es verwandele sich nun Q in Q^1, wenn aus x, y, Z die Werthe $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $Z+\Delta Z$ entstehen, so hat man $Q^1 = x+\Delta x+y+\Delta y+Z+\Delta Z$ und $Q^1 - Q = \Delta Q = x+\Delta x+y+\Delta y+Z+\Delta Z-x-y-Z$.

§. 271.

Zusatz.

Es sey $Q = a+x+y$, so hat man $\Delta Q = \Delta x+\Delta y$ d. h. die Differenz einer beständigen Größe ist $= 0$.

§. 272.

Aufgabe.

Die Differenz von yx zu finden.

Man setze statt x und y die veränderten Werthe $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$, multiplicire sodann wie gewöhnlich. Von diesem Produkte subtrahire man sodann die gegebene Funktion, so erhält man die Differenz von xy. Es ist nemlich

$$(x+\Delta x)(y+\Delta y) = yx+x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y$$

$$\begin{array}{l} \text{sub. } xy \\ \hline x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y \end{array}$$

Beweis

Es sey $Z = xy$. Nun werde x und y um Δx und Δy größer, so muß auch Z um ein Stück wachsen;

sen; es sey der veränderte Werth $Z^1 = (x+\Delta x)(y+\Delta y)$ und $Z^1 - Z = \Delta Z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - yx$.

§. 273.

Aufgabe.

Die Differenz von $\frac{x}{y}$ zu finden.

Auflösung.

Man setze statt x und y die veränderten Werthe $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$, subtrahire alsdenn von der veränderten Funktion die gegebene. Es ist nemlich

$$\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{xy+y\Delta x}{y^2+y\Delta y} - \frac{xy+x\Delta y}{y^2+y\Delta y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy+y\Delta y}.$$

§. 274.

Zusatz.

Es sey $Z = \frac{a}{y}$, so ist $\Delta Z = \frac{a}{y+\Delta y} - \frac{a}{y} =$

$$\frac{ay}{y^2+y\Delta y} - \frac{ay-a\Delta y}{y^2+y\Delta y} = \frac{-a\Delta y}{y^2+y\Delta y}.$$

§. 275.

Zusatz.

Ist $Z = \frac{x}{a}$, so ist $\Delta Z = \frac{x+\Delta x}{a} - \frac{x}{a} =$

$$\frac{ax+a\Delta x}{aa} - \frac{ax}{aa} = \frac{a\Delta x}{aa}.$$

§. 276.

§. 276.

Aufgabe.

Die Differenz von x^n zu finden.

Auflösung.

Man setze statt x den veränderten Werth $x + \Delta x$ und subtrahire von der gefundenen Funktion die gegebene. Man findet nemlich

$$(x + \Delta x)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3} \Delta x^3 + \text{u. f.} - x^n =$$

$$nx^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2} \Delta x^2 + \text{u. f.}$$

§. 277.

Erklärung.

Hat man die Differenz einer Funktion gefunden, so kann man wiederum die Differenz von dieser gefundenen Differenz suchen. Dieses ist so zu verstehen. Wenn eine veränderliche Größe um ein unbestimmtes Stück zugenommen hat, so kann sie nun zum zweytenmale ebenfalls um ein unbestimmtes Stück wachsen, jedoch nimmt man an, daß der zweyte Zuwachs dem ersten eben nicht gleich, sondern etwas größer oder kleiner, daß also beyde eine Differenz haben. Diese Differenz wird nun die zweyte Differenz genennt, und durch $\Delta\Delta = \Delta^2$ bezeichnet. Auf die nemliche Weise kann die zweyte Differenz wiederum um ein unbestimmtes Stück wachsen, und die Differenz der zweyten und des Zuwachses heißt die dritte Differenz, und wird durch

$\Delta 3$ ausgedrückt. Ueberhaupt ist nun deutlich, was die nte Differenz einer Funktion sey.

§. 273.

Aufgabe.

Die zweyte Differenz einer Funktion zu finden

Auflösung.

In der ersten Differenz nehme jede veränderliche Größe um ihre Differenz, und jede Differenz um ihre zweyte Differenz zu, alsdenn subtrahire man die erste Differenz, so erhält man die zweyte. Z. E. Man soll $\Delta^2(xy)$ finden. Man hat schon §. 272. $\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$. Setzt man nun statt x, y, Δx, Δy die veränderten Werthe $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $\Delta x + \Delta^2 x$, $\Delta y + \Delta^2 y$, so bekommt man

$$\Delta^2(yx) = x\Delta y + y\Delta x + 3\Delta x\Delta y + 2\Delta y\Delta^2 x + 2\Delta x\Delta^2 y + y\Delta^2 y + y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y.$$

subtr. $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$

$$\Delta^2(xy) = 2\Delta x\Delta y + 2\Delta y\Delta^2 x + 2\Delta x\Delta^2 y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + \Delta^2 x\Delta^2 y.$$

§. 289.

Zusatz.

Es geschiehet öfters, daß die erste Differenz einer Funktion eine beständige Größe wird wie z. E. Die Differenzen der Glieder einer arithmetischen Progression; alsdenn werden die zweyten Differenzen $= 0$. Würde also in dem vorigen Beyspiele Δx eine beständige Größe, so fallen alle die Glieder weg, welche mit $\Delta^2 x$ sind multipliciret worden, und

es

es würde $\Delta^2(xy) = 2\Delta x \Delta y + 2\Delta x \Delta^2 y + \Delta^2 y$. Sollte endlich auch Δy beständig seyn, so wird $\Delta^2(xy) = \Delta x\ \Delta y$.

§. 280.

Lehrsatz.

Wenn $y = a + bx + cx^2 + dx^3 +$ u. s. also eine Funktion von x, so ist $\Delta y : \Delta x$ ein veränderliches Verhältniß.

Beweis.

Es werde $y + \Delta y$ aus y und $x + \Delta x$ aus x. Betrachtet man alsdenn x und y als beständig, so wird $\Delta y = b\Delta x + c\Delta x^2 + d\Delta x^3 +$ u. s. ein allgemeiner Ausdruck für die Differenz einer einzigen veränderlichen Größe x. Hieraus wird nun $\frac{\Delta y}{\Delta x} = b + c\Delta x + d\Delta x^2 +$ u. s. also $\Delta y : \Delta x$ ein veränderliches Verhältniß, welches immer kleiner wird, wenn x kleinere und kleinere Werthe erhält.

§. 281.

Zusatz.

Verschwindet Δx oder wird $= 0$, so wird $\Delta y : \Delta x = b : 1$ also $b : 1$ die Gränze des Verhältnißes $\Delta y : \Delta x$.

§. 282.

Erklärung.

In dem Falle, da die Differenzen des Verhältnißes $\Delta y : \Delta x$ in dem verschwindenden Zustande sich befin-

befinden pflegt man dieselben Differenziale zu nennen, und gebrauchet alsdenn statt des Zeichens △ den lateinischen Buchstaben d. Das Verhältniß dy : dx = b : 1 heißt alsdenn das Differenzialverhältniß, und eine Funktion differenziiren ihr Differenzialverhältniß suchen. Es beschäftiget sich also die Differenzialrechnung mit denjenigen Regeln, nach welchen das Differenzialverhältniß auf dem kürzesten Wege zu finden sey.

§. 283.

Zusatz.

Das Differenzialprodukt einer veränderlichen Größe in eine beständige ist das Differenzial der veränderlichen Größe in die beständige. So ist z. E. d. ax = adx.

§. 284.

Aufgabe.

Eine zusammengesetzte Größe zu differenziiren.

Auflösung.

Man differenziire jeden Theil besonders, und behalte die Verbindungszeichen ✠ und — bey. Z. E. d(x ✠ y — a) = dx ✠ dy.

Beweis.

Es sey $Z = x \pm y - a$, so ist $\Delta Z = \Delta x \pm \Delta y$ (§. 270.) und $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \pm \frac{\Delta y}{\Delta t}$ also $\Delta Z = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \pm \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\Delta t$, oder $dZ = \left(\frac{dx}{dt} \pm \frac{dy}{dt}\right)dt = dx \pm dy$.

§. 285.

Zusatz.

Das Differenzial einer beständigen Größe a ist $= 0$.

§. 286.

Aufgabe.

Das Differenzial eines Produktes zu finden.

Auflösung.

Man multiplicire das Differenzial einer jeden veränderlichen Größe mit den übrigen Faktoren, und bringe die daher entstandenen Produkte in eine Summe. Z. E. $d.xy = xdy + ydx$.

Beweis.

Es sey $Z = xy$, so hat man $\Delta Z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ also $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{x\Delta y}{\Delta t} + \frac{y\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}$ oder $\frac{dZ}{dt} = \frac{xdy}{dt} + \frac{ydx}{dt} + \frac{dxdy}{dt} = \frac{xdy}{dt} + \frac{ydx}{dt}$, weil $\frac{dxdy}{dt} = 0$ (§. 264.), also $dZ = \left(\frac{xdy}{dt} + \frac{ydx}{dt}\right) dt = xdy + ydx$.

§. 287.

Aufgabe.

Einen Bruch zu differenziiren.

Auflösung.

Sind die Zähler und Nenner veränderliche Größen, so multiplicire man das Differenzial des

Zählers mit den Nenner, und das Differenzial des Nenners mit dem Zähler, und subtrahire dieses Produkt von jenem, alsdenn dividire man was herauskommt, durch das Quadrat des Nennes.

Ist der Zähler eine beständige Größe, so nehme man das negative Produkt des Zählers in das Differenzial des Nenners, und dividire dieses durch das Quadrat des Nenners.

Ist der Nenner beständig, so nehme man das Differenzial des Zählers, und dividire dieses durch den Nenner. Z. E.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{-ady}{y^2}$$

$$d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a}.$$

Beweis.

Es sey $Z = \frac{x}{y}$, so ist $yZ = x$ und $yxd + Zdy = dx$, oder weil $Z = \frac{x}{y}$, $ydZ + \frac{x}{y}dy = dx$, und $yydZ + xdy = ydx$ oder $yydZ = ydx - xdy$ folglich $dZ = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Aus eben diesem Grunde hat man auch $d\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{yda - ady}{y^2}$, weil aber $da = o$, also auch $yda = o$, so ist $d\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{-ady}{yy}$. Eben so ist auch $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - xda}{aa} = \frac{adx}{aa} = \frac{dx}{a}$, weil $xda = o$.

§. 288.

Aufgabe.

Eine Potenz zu differenziiren.

Auflösung.

Den Exponenten vermindere man um Eins, und multiplicire alsdenn was herauskömmt mit dem Exponenten und dem Differenzial von der Wurzel.

Z. E. $d.x^n = nx^{n-1} dx$

$dx^{-n} = -nx^{-n-1} dx$

$dx^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} a^{\frac{n}{m}-1}$

$d.x^{-\frac{n}{m}} = -\frac{n}{m} x^{-\frac{n}{m}-1} dx.$

Beweis.

Es sey $y = x^n$ also $\Delta y = ny^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1}{1.2.} x^{n-1} \Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3} \Delta x^3 +$ u. f. also

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2.} x^{n-2} \Delta x + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.}$

$x^{n-3} \Delta x^2 +$ u. f. folglich $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, weil alle folgende Glieder $= 0$ werden (§. 264), und daher $dy = nx^{n-1} dx.$

§. 289.

Aufgabe.

Das zweyte dritte, vierte u. f. Differenzial einer Funktion zu finden.

Auflösung.

Man suche das erste Differenzial der Funktion, und betrachte die veränderlichen Größen sowohl als ihre Differenziale als veränderlich, differenziire alsdenn nach eben den Regeln, welche zur Erhaltung des ersten Differenzials sind gegeben worden z. E. Man soll die auf einander folgenden Differnziale von xy finden.

1 Differenzial

$$xdy + ydx$$

2 Differenzial

Es ist $d(xdy) = dx\,dy + xd^2y$

$d(ydx) = dx\,dy + yd^2x$ oder

$d^2(xy) = 2dx\,dy + xd^2y + yd^2x$

3. Differenzial

Es ist $d(2dx\,dy) = 2dxd^2y + 2dy\,d^2x$

$d(xd^2y) = dxdy + xd^3y$

$d(yd^2x) = dyd^2x + yd^3x$ oder

$d^3(xy) = 3dxd^2y + 3dyd^2x + xd^3y + yd^3x$ u. f.

§. 290.

Zusatz.

Findet man dx beständig, also $d^2x = 0$, so fallen in den höhern Differenzialen alle Glieder weg, welche durch d^2x, d^3x u. f. sind multipliciret worden, und es wird $d^2(xy) = 2dx\,dy + xd^2y$; $d^3(xy) = 3dx\,d^2y + xd^3y$ u. f. Fände man endlich auch dy beständig, so würde $d^2(xy) = 2dxdy$; $d^3(xy) = 0$.

Achtes Kapitel.

Von den Logarithmen und von der Anwendung der Differenzialrechnung auf Logarithmen.

§. 291.

Erklärung.

Wenn eine beständige Zahl a zur xten Potenz erhoben wird, so kann man annehmen, daß die Potenz einer gegebenen Zahl y gleich werde; wie der Ausdruck $a^x = y$. So bald sich also y ändert, so muß auch der Exponent x eine Aenderung, leiden, wenn a beständig seyn soll, demnach ist y eine Funktion von a^x. Es kommt also hier blos darauf an, wie der Exponent x gefunden werden könne, wenn a beständig, und y immer andere und andere Werthe bekommt. Der Exponent x wird alsdenn der **Logarithme**, die beständige Zahl a die **Basis** oder **Grundzahl**, und die Zahl y die zum Logarithmen x gehörige Zahl genennt. Den Logarithmen einer Zahl bezeichnet man gemeiniglich so, daß man vor derselben den Buchstaben l. schreibt. Demnach ist $l.y = l.a^x = x$.

§. 292.

Zusatz.

Es sey $x = 1$, so ist $l.a^x = l.a^1 = 1 = l.a$; ist aber $x = 0$, so ist $l.a^0 = 0 = l.1$. d. h. der Logarithme der Basis ist allemal Eins, und der Logarithme der Einheit $= 0$.

§. 293.

Erklärung.

Setzt man in dem Ausdrucke $a^x = y$ für y die auf einander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. f. und suchet hierzu die Logarithmen, so erhält man sodann eine Reihe zu diesen Zahlen gehörigen Logarithmen. Eine solche Reihe von Logarithmen mit den dazu gehörigen Zahlen für einerley Grundzahl heißt ein **logarithmisches System.** Es giebt demnach eine unzählige Menge von logarithmischen Systemen, weil man für die Grundzahl eine jede Zahl willkührlich annehmen kann.

§. 294.

Zusatz.

Nimmt man für x nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 u. f. so laufen die Logarithmen in einem stetigen arithmetischen, und die dazu gehörigen Zahlen in einem stetigen geometrischen Verhältniße fort. Denn für

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ u. f. wird
$a^x = 1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ u. f.

mithin sind die Differenzen der Logarithmen beständig (§. 279.) Hieraus folgt nun, daß sich in einem logarithmischen Systeme die Differenz einer Zahl zur Zahl eben so verhalten müße, wie die Differenz des Logarithmen zu einer beständigen Zahl, welche aber von dem Werthe der Grundzahl abhänget. Die beständige Zahl sey nun m, a^x die Zahl und x der dazu gehörige Logarithme, so hat man

$\Delta(a^x) : a^x = \Delta x : m$, Weil nun $\Delta(a^x) = a^x + \Delta^x - a^x = a^x\, a^{\Delta x} - a^x$, so hat man auch

$(a^x\, a^{\Delta x} - a^x) : a^x = \Delta x : m$ mithin

$$m = \frac{a^x\, \Delta^x}{a^x\, a^{\Delta x} - a^x} = \frac{a^x\, \Delta^x}{(a^{\Delta x} - 1)a^x} = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$$

Es sey z. E. $a = 2$, nnd $\Delta x = 1$, so ist für

$x =$	0,	1	2	3	4	5	6 u. f.
$a^x =$	1,	2	4	8	16	32	64 u. f.

und daher $4 - 2 : 2 = 1 : 1$

$8 - 4 : 4 = 1 : 1$

$32 - 16 : 16 = 1 : 1$ u. f.

Setzt man ferner $a = 10$ und $\Delta x = 1$, so ist für

$x =$	0,	1,	2	3	4	5	6
$a^x =$	1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000

also

$100 - 10 : 10 = 2 - 1 : \frac{1}{9}$

$1000 - 100 : 100 = 3 - 2 : \frac{1}{9}$ u. f.

Ferner sey $a = 4$ und $\Delta x = 2$, so hat man

für $x =$	0,	2	4	6	8	10
$a^x =$	1,	4	16	64	256	1024

also

$16 - 4 : 4 = 2 : \frac{2}{3}$

$256 - 64 : 64 = 2 : \frac{2}{3}$ u. f.

§. 295.

Zusatz.

Je größer also Δx wird, desto kleiner wird m, und umgekehrt, je kleiner Δx wird, desto größer wird m. Verschwindet Δx oder wird $= 0$, so muß m eine Gränze erreichen, womit es zu wach-

sen aufhören muß. Denn alsdenn hat man $m = \frac{0}{a^0 - 1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$. Aber dieser Ausdruck hat allemal einen bestimmten Werth (§. 263.) Man setze denselben $= k$, und es ist die Gränze des Verhältnißes $\frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{dx}{a^{dx} - 1} = k$.

§. 296.

Erklärung.

Die Zahl k, welche in verschiedenen logarithmischen Systemen auch verschiedene Werthe erhält, indem sie von dem Werthe der Grundzahl abhängt, heißt der **Model**, die **Subtangente** oder die **beständige Zahl des Systems.**

§. 297.

Grundsätze.

In einerley logarithmischen Systeme gehören zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen, und umgekehrt zu gleichen Logarithmen gleiche Zahlen.

§. 298.

Zusatz.

Sobald also in einem logarithmischen Systeme die Grundzahl bestimmt ist, sobald ist auch das ganze System bestimmt, weil alsdenn einer jeden Zahl ihr eigener Logarithme zugehöret.

§. 299.

Lehrsatz.

Der Logarithme eines Produktes in einerley logarith-

garithmischen Systeme ist die Summe der Logarithmen der Faktoren.

Beweis.

Es sey $a^x = y$ und $a^z = q$, so ist $yq = a^{x+z}$ (§. 112.) also $l.yq = x + z = l.y + l.q$.

§. 300.

Zusatz.

Der Logarithme eines Quadrats ist doppelt so groß, der Logarithme eines Würfels dreymal so groß und der Logarithme der nten Potenz nmal so groß als der Logarithme der Wurzel. Umgekehrt ist daher auch der Logarithme einer Quadratwurzel halb so groß als der Logarithme des Quadrats, einer Cubikwurzel $\frac{1}{3}$ mal so groß als der Logarithme des Würfels, und der Logarithme der Wurzel aus der nten Potenz $\frac{1}{n}$tel mal so groß als der Logarithme der nten Potenz.

§. 301.

Lehrsatz.

Der Logarithme eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendi subtrahirt.

Beweis.

Es sey $a^x = y$, und $a^z = q$, so ist $\frac{y}{q} = a^{x-z}$ und daher $l.\frac{y}{q} = x - z = l.y - l.q$.

§. 302.

Zusatz.

Soll demnach zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl gesuchet werden, und die Logarithmen derselben sind bekannt, so braucht man nur den zweyten und dritten Logarithmen zu addiren, und von dieser Summe den ersten zu subtrahiren, um den Logarithmen der vierten Proportionalzahl und daraus die Zahl selbst zu finden.

§. 303.

Lehrsatz.

Die Logarithmen ein und der nemlichen Zahl in zweyen verschiedenen Systemen haben einerley Verhältniß zu einander.

Beweis.

Es sey für die Basis a, $a^n = q$ und für die Basis b $b^m = q$, folglich $a^n = b^m$ und $a = b^{\frac{m}{n}}$, also muß der Bruch $\frac{m}{n}$ einen beständigen Werth erhalten, man mag für q eine Zahl annehmen, was man für eine will. Z. E. ist a = 2, und b = 4, so hat man für

n =	0,	1	2	3	4	5	6	7	8
a^n =	1,	2	4	8	16	32	64	128	256
m =	0,	1	2	3	4	5	—	—	
b^m =	1,	4	16	64	256	1024	—		also

8:6 = 4:3; 6:2 = 3:1 u. s. f.

§. 304.

Zusatz.

Es sey $a^x = y$ und $a^{x+\Delta x} = y + \Delta y$, also $l.y = x$ und $l.(y+\Delta y) = x + \Delta x$. Für die Basis eines andern Systems sey $b^r = y$ und $b^{r+\Delta r} = y + \Delta y$, also $l.y = r$ und $l.(y+\Delta y) = r + \Delta r$. Hieraus folgt, daß

$x : r = x + \Delta x : r + \Delta r$ (§. 303.) oder

$\Delta x : \Delta r = x + \Delta x : r + \Delta r$. Nun ist

$\Delta y : y = \Delta x : m$ (§. 294.) und

$\Delta y : y = \Delta r : n$, mithin auch

$\Delta x : m = \Delta r : n$ oder

$\Delta x : \Delta r = m : n$, demnach

$x + \Delta x : r + \Delta r = m : n$ und

$\frac{x + \Delta x}{r + \Delta r} = \frac{m}{n}$. Verschwindet nun Δx und hiermit zugleich Δr, so werde k aus m und h aus n und man erhält $\frac{x}{r} = \frac{k}{h}$ oder $x : r = k : h$ d. h. die Logarithmen ein und der nemlichen Zahl y in zweyen verschiedenen Systemen verhalten sich zu einander wie die Subtangenten der Systeme.

§. 305.

Erklärung.

Das System, wo der Madel $= 1$ gesetzet wird, heißt das **natürliche System**, und die dazu gehörigen Logarithmen die **natürlichen** oder **hyperbolischen**. So bald als die natürlichen Logarithmen bekannt sind, so ist man auch im Stande, die Logarithmen eines jeden andern Systems zu finden. Um sich nun nicht zu verwirren, so bezeichne

zeichne man im folgenden den natürlichen Logarithmen durch l., und einen jeden andere durch L.

§. 306.

Aufgabe.

Das Differenzial von $a^x = y$ zu finden.

Auflösung.

Nach den §. 294. hat man $\Delta y : y = \Delta x : m$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{m}$. Verschwindet nun Δx und hiermit zugleich Δy, so werde k aus m, und man erhält $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{k}$. In dem natürlichen Systeme ist $k = 1$, also $\frac{dy}{dx} = y$ und $dx = \frac{dy}{y}$. Es ist aber auch ferner $l.y = x\,l.a = x$, wenn a die Basis ist, mithin $dx = dx\,l.a = \frac{dy}{y}$ und $dy = ydxl.a =$ $a^x\,dxl.a$ d. h. man multiplicire die logarithmische Größe a^x mit dem Differenzial des Logarithmen, das Produkt ist das Differenzial der logarithmischen Größe a^x.

§. 307.

Aufgabe.

Den natürlichen Logarithmen von einer jeden Zahl zu finden.

Auflösung.

Es sey q die Zahl, wovon der Logarithme gesucht werden soll, so findet man

l.q

$$l.q = 2\left(\frac{q-1}{q+1} + \frac{(q-1)^3}{3(q+1)^3} + \frac{(q-1)^5}{5(q+1)^5} + \text{u. f.}\right)$$

Es sey $q = 2$, so hat man

$$l.2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{u. f.}\right)$$

oder wenn man alles in Decimalbrüchen berechnet und gehörig zusammenaddiret

$l.2 = 0,693147180559 - - -$

Ferner findet man

$l.3 = 1,098612288668 - - -$
$2l.2 = l.4 = 1,386294361119 8 - -$
$l.5 = 1,609437912434341 - -$
$l.2 + l.3 = l.6 = 1,791759469228 05 - -$
$l.7 = 1,945910137170 74 - -$
$l.2 + l.4 = l.8 = 2,079441541679 - -$
$2l.3 = l.9 = 2,197224577336 - -$
$l.2 + l.5 = l.10 = 2,302585092994 0 - -$

Anmerk. Den Beweis von dieser und noch einiger folgenden Aufgaben findet man in meiner Anleitung zur allgemeinen Rechenkunst S. 397. §. 524. u. ff.

§. 258.

Erklärung.

Logarithmentafeln sind ein Buch, worinn die Logarithmen einer Reihe von Zahlen für eine gewiße Basis sind berechnet worden. Bey dem gemeinen Logarithmensystem, welche man auch Tabularlogarithmen oder nach dem Erfinder Briggе, **briggische Logarithmen** nennt, liegt die

Basis

Basis 10 zum Grunde. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 fallen also zwischen 1 und 0, die Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 fallen zwischen 1 und 2, u. s. drückt man nun die Logarithmen durch Decimalbrüche aus, so werden die Stellen der Einer der Logarithmen zwischen 1 und 10, die 0, die zwischen 10 und 100 die Einheit, die zwischen 100 und 1000 die Zahl 2 u. s. f. Es hat demnach die Zahl, wozu ein Logarithme gehöret, eine Ziffer mehr, als die Zahl der Stelle der Einer des Logarithmen Einheiten hat. Aus diesem Grunde hat man die Zahl in der Stelle der Einer der Logarithmen den Namen der **Kennziffer** (nota characteristica) gegeben.

§. 309.

Aufgabe.

Den Model eines jeden Systems zu finden.

Auflösung.

Es sey m der Model des Systems, und a die dazu gehörige Basis, so hat man nach 304. §.

$$1 : m = l.a : L.a, \text{ und weil } L.a = 1 ; m = \frac{1}{l.a}$$

Man suche also den natürlichen Logarithmen von der Basis eines Systems, und dividire hiermit die Einheit, der Quotiente ist der Model des Systems. Es sey z. E. a = 10 oder die Basis des gemeinen Systems so ist l. 10 = 2, 302585093, also

$$m = \frac{1}{2,302585093} = 0,434294481903 25$$

— wofür man 0,434294482 nehmen kann.

§. 310.

Zusatz.

Es bezeichne q eine jede Zahl in einem logarithmischen Systeme, und L. q den dazu gehörigen Logarithmen, so wie l. q. den Logarithmen eben dieser Zahl, so ist (§. 304).

1 : m = l. q : L. q. also L. q = m l. q d. h.

Wenn man jeden natürlichen Logarithmen mit dem Model eines jeden andern Systems multipliciret, so erhält man die Logarithmen dieses Systems. Z. E. Soll man den gemeinen Logarithmen von 2. suchen, so hat man

L. 2 = 0,6931471805 × 0,4342944482 =

0,3010299956 — — — wofür man

0,30103000 nehmen kann. Hieraus findet man ferner

L. 2 + L. 2 = L. 4 = 0,6020600

L. 2 + L. 4 = L. 8 = 0,9030900

L. 10 − L. 2 = L. 5 = 0,6989700

Auf die nemliche Weise findet man nun die Logarithmen von 3, 7 und überhaupt von allen Zahlen des gemeinen Logarithmensystems.

§. 311.

Aufgabe.

Zu finden, um wie viel eine Zahl zunehmen muß, wenn der darzu gehörige Logarithme um einen Theil zunimmt.

Auflösung.

Es sey a die Basis, y die Zahl, wozu der Logarithme x gehöret, so ist $a^x = y$, und man findet

$\Delta y = y\Delta x l.a + \frac{1}{2} y\Delta x^2 l.a^2 + \frac{1}{6} y\Delta x^3 l.a^3 +$ u. f.
Es sey a = 10 oder die Basis des gemeinen Logarithmensystems, und der gegeb. Logarithme 3,6842657 = x + Δx. In den Tafeln findet man nun

y = 4833 und l. 4833 = 3,6842168 = x
3,68426.5.7 = x + Δx
subt. 3,6842168 = x

0,0000489 = Δx
2,3025850 = l.a

0,0000868
11
124
22

0,0001124 = Δx l.a
4833,0000 = y

0 0004486
1
0000886
13
000033
00003

0,55521 = yΔx l.a
0,0001124 = Δx l.a

0,0000550
12
44
3

Divid. 2) 0,0000609 = $y\Delta x^2 l.a^2$
0,0000304 = $\frac{1}{2} y\Delta x^2 l.a^2$ mithin
$y\Delta x$

$y\Delta x\, l.\, a + \frac{1}{2} y\Delta x^2\, l.\, a^2 = 0{,}5431$

$0{,}0304$

$0{,}5735 = \Delta y$, also ist die Zahl, welche zu den gegebenen Logarithmen gehöret $= 4833{,}5735 = y + \Delta y$. Sollte aber die Kennziffer des gegebenen Logarithmen die Kennziffer der in den Tafeln berechneten Logarithmen übertreffen, so suche man nur, wie groß die dazu gehörige Zahl seyn müße, wenn die Kennziffer 3 wäre. Z. E. Man suche die Zahl $y + \Delta y$ zu den Logarithmen 6,4328964. Man nehme an die Kennziffer sey nicht 6 sondern 3, also der Logarithme 3,4328964, und die dazu gehörige Zahl $= n$, so hat man $l.\, n = 3{,}4328964$ und $l.\, 1000.\, n$ oder $l.\, 1000 + l.\, n = l.\,(y + \Delta y) = 6{,}4328964$. Nach den Tafeln findet man

$3{,}4328964 = x + \Delta x$

$3{,}4328090 = l.\, 2709 = x$

$0{,}0000874 = \Delta x$

$2{,}3025850 = l.\, a$

$0{,}0000648$

1141

221

1

$0{,}0002011 = \Delta x\, l.\, a$

$2709{,}0000 = y$

00004022

1407

18

$0{,}5447 = y\Delta x\, l.\, a$

$0{,}0002011 = \Delta x\, l.a$

00088

1 1

5

Divid. 2) $0{,}1094 = y\Delta x^2\, l.a^2$

$0{,}0547 = \frac{1}{2} y\Delta x^2\, l.a^2$ mithin

$y\Delta x\, l.a + \frac{1}{2} y\Delta x^2\, l.a^2 = 0{,}5447$

$0{,}0547$

$0{,}5994 = \Delta y$ demnach

L. $2709{,}5994 = 3{,}4328964$

L. $1000 \times 2709{,}5994 = 6{,}4328964$ oder

L. $2709599{,}4 = 6{,}4328964$

§. 312.

Aufgabe.

Zu finden, um wie viel ein Logarithme zunehmen muß, wenn die dazu gehörige Zahl um einen Theil größer wird.

Auflösung.

Es sey $x = L.\, y$. Wird nun $x + \Delta x$ aus x, wenn L. $(y + \Delta y)$ aus y wird, so findet man

$$\Delta x = \frac{m\Delta y}{y} - \frac{m\Delta y^2}{2y^2} + \frac{m\Delta y^3}{3y^3} - \frac{m\Delta y^4}{4y^4} +$$

u. f.

Es sey z. E. der Logarithme zu finden, welcher zu der gegebenen Zahl 5643,543 im gemeinen Logarithmensysteme gehöret, also ist $5643{,}543 = y + \Delta y$

$5643 = y$

$0{,}543 = \Delta y$, mithin

0,54300

0,54300 (962 = 0,0000962 = $\frac{\Delta y}{y}$
5643

50787 — 0,4342944 = m (§. 309.)

35130 — 0 0000064

33858 — 32

12720 — 27

11286 — 1

(1434) — 3

$0{,}0000415 = \frac{m\Delta y}{y}$

$0{,}0000962 = \frac{\Delta y}{y}$

000

Addiret man also zu Ł. 5 643 = 3,75151 00
Ł. 0,543 = 0,0000415

so findet man Ł. 5643,543 = 3,7515515.

Sollte aber die gegebene Zahl die Gränzen der gemeinen Logarithmentafeln überschreiten, so betrachtet man die vierte Ziffer als Einer und die nächstfolgenden als Decimalbrüche. Ist z. E. die gegebene Zahl 4568964, so suche man bloß den Logarithmen von 4568,964, alsdenn erhält man Ł. 4568964 = Ł. 4568,964 × 1000 = Ł. 4568,964 + Ł. 1000. Nun hat man

4568,964 = y + Δy
4568 = y

0,964 = Δy also

0,9640 (= 2110 = 0,0002110 = $\frac{\Delta y}{y}$
4568

9136 — 0,4342944 = m

5040 — 0,0000844

$$\frac{4568}{4720} \quad \frac{63}{8}$$

$$\frac{4568}{(1,20)} \qquad 0{,}0000915 = \frac{m\Delta y}{y}$$

Nach den Tafeln findet man

$$\text{L. } 4568 = 3{,}6597261$$
$$\text{L. } 0{,}964 = 0{,}0000915$$

$$\text{L. } 4568{,}964 = 3{,}6598176 \text{ und}$$
$$\text{L. } 4568964 = 6{,}6598176.$$

§. 313.

Bey dem Gebrauche der gemeinen Logarithmentafeln geben diese beyden letzten Aufgaben die zu suchenden Resultate völlig an. Oefters hat man aber dabey weitläuftige Rechnungen vorzunehmen. Aus diesem Grunde hat man ein Verhältniß zu bestimmen gesucht, vermittelst welchem man das Verlangte ziemlich genau finden kann. Vergleichet man nemlich einen Logarithmen mit einem andern, so wird man die Differenzen beynahe gleich groß finden. Man kann also schließen, die Differenzen der Logarithmen verhalten sich zu einander, wie die Differenzen der dazu gehörigen Zahlen.

§. 314.

Aufgabe.

Eine Zahl, welche die gemeinen Logarithmentafeln nicht enthält, ist gegeben, man soll den dazu gehörigen Logarithmen nach der Voraussetzung, des vorigen §. finden.

Auflösung.

Man betrachte die vierte Ziffer der gegebenen Zahl als Einer, und die nachfolgenden als Decimaltheile. Ist z. E. die Zahl 4568964 gegeben, so suche man den Logarithmen von 4568,964, alsdenn erhält man £. 4568,964 × 1000 = £. 4568,964 + £. 1000 = £. 4568964. Nach den Tafeln findet man £. 4569 = 3,6598612

£. 4568 = 3,6597261

1 0,0001351

Die gegebene Zahl übertrift die kleinere um 0,964; demnach setze man nach der Regel Detri:

1 : 0,964 = 0,0001351 :

0,964

0 0000975

24

68

4

1

0,0001301, also

£. 4568 = 3,6597261

£. 0,964 = 0,0001301

£. 4568,964 = 3,6598562 und

£. 4568 964 = 6,6598562

§. 315.

Aufgabe.

Es ist ein Logarithme gegeben, man soll die dazu gehörige Zahl vermittelst der Tafeln finden.

Auflösung.

Die Kennziffer mag seyn, welche sie wolle, so suche man nur, wie groß die Zahl seyn müße, wenn die Kennziffer 3 wäre. Z. E. Es sey der Logarithme 5,4632892 gegeben, und die dazu gehörige Zahl $= n$, so hat man $\mathfrak{L}. n, = 3,4632892 + 2$ und $\mathfrak{L} n - \mathfrak{L}. 100 = 3,463892$ oder $\mathfrak{L}. \frac{n}{100} = 3,4362892$.

Nach den Tafeln findet man

$\mathfrak{L}. 2906 = 3,4632956$		$\mathfrak{L}. \frac{n}{100} = 3,4632892$	
$\mathfrak{L}. 2905 = 3,4631461$		$\mathfrak{L}. 2905 = 3,4631461$	
1	0,0001495		0,0001431

Nun kann man setzen

$0,0001495 : 0,0001431 = 1 : 0,957$ also

$\frac{n}{100} = 2905,957$ und $n = 2905957$.

Neuntes Kapitel.

Von der Integralrechnung.

§. 316.

Erklärung.

Wenn eine Differenzialfunktion gegeben worden, und man soll die Funktion wieder finden, woraus das Differenzial entstanden, so sagt man, man soll das Integral oder die Summe der Differenzialfunktion suchen. Es beschäftiget sich demnach die Integralrechnung mit denjenigen Regeln, nach welchen das Integral eines gegebenen Differenzials auf dem kürzesten Wege zu finden ist. Um das Integral eines gegebenen Differenzials anzuzeigen, gebrauchet man den lateinischen Buchstaben $\int$.

§. 317.

Zusatz.

Es ist demnach

1. $\int dx + \int dy = x + y$ (§. 284.)
2. $\int (xdy + ydx) = xy$ (§. 286)
3. $\int \left(\frac{ydx - xdy}{yy}\right) = \frac{x}{y}$; $\int \left(\frac{-ady}{yy}\right) = \frac{a}{y}$;

$\int \left(\frac{dx}{a}\right) = \frac{x}{a}$ (§. 287.)

4. $\int nx^{n-1} dx = x^n$; $\int -nx^{-n-1} dx = x^{-n}$

$\int -\frac{n'}{m} x^{-\frac{n}{m}-1} dx = x^{-\frac{n}{m}}$ u. s. f. (§. 288.)

5. $\int \frac{dx}{x} = l. x.$ (§. 306.)

§. 318.

Zusatz.

Eine veränderliche Größe, wozu eine beständige Größe addiret oder davon subtrahiret ist, giebt blos das Differenzial der veränderlichen Größe, weil die beständige kein Differenzial hat. Daher sind die Integrale im vorigen §. eigentlich $x + y + C$;

$xy + C$; $\frac{x}{y} + C$; $\frac{a}{y} + C$; $\frac{x}{a} + C$; $x^n + C$

u. s. f. wo die Größe C als eine beständig veränderliche Größe negativ und positiv, selbst o seyn kann, und aus den Bedingungen einer Aufgabe bestimmt werden muß.

§. 319.

Aufgabe.

Das Integral von $x^n dx$ zu finden.

Auflösung.

Man dividire $x^n\,dx$ durch dx, und addire zu den Exponenten 1. Darauf dividire man x^{n+1} durch den Exponenten $+1$, so hat man das Integral. Es ist nemlich $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Z. E. $\int (x^2\,dx + 2x^3\,dx) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} + C$.

Beweis.

Differenziiret man $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ so erhält man $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{n+1}{n+1}\,x^{n+1-1}\,dx = x^n\,dx$, mithin ist $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ das Integral des Differenzials $x^n\,dx$.

§. 320.

Aufgabe.

Eine gegebene irrationale Differenzialfunktion von x zu integriren.

Auflösung.

Man verwandele sie in eine unendliche Reihe, und integrire jedes Glied besonders. Z. E.

$\int \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \int r\,dx \cdot \frac{1}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$. Nun ist

$\frac{1}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = r^{-1} + \frac{1}{2}\,r^{-3}\,x^2 + \frac{3}{2.4}\,r^{-5}\,x^4 + \frac{2.4.6}{3.5}$

$$\frac{3.5.}{2.4.6} r^{-7} x^6 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8} r^{-9} x^8 + \text{u. f.}$$

(§. 268.)

also $r dx. \frac{1}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = dx + \frac{1}{2} r^{-2} x^2 dx + \frac{3}{2.4} r^{-4} x^4 dx$

$$+ \frac{3.5.}{2.4.6} r^{-6} x^6 dx + \frac{3.5.7}{2.4.6.8} r^{-8} x^8 dx + \text{u. f.}$$

und das Integral oder

$$\int \frac{r dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = x + \frac{1}{2.3} r^{-2} x^3 + \frac{3}{2.4.5} r^{-4} x^5$$

$$+ \frac{3.5.}{2.4.6.7} r^{-6} x^7 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9} r^{-8} x^9 + \text{u. f.}$$

Anmerk. Es giebt Fälle, wo man des Integral einer irrationalen Differenzialfunktion in endlichen Ausdrückungen finden kann. Hierzu gebrauchet man aber Formeln, welche in meiner Anleitung zur Buchstabenrechenkunst §. 554. S. 431 u. f. befindlich sind.

§. 321.

Aufgabe.

Eine gegebene gebrochene Differenzialfunktion einer einzigen veränderlichen Größe x zu integriren.

Auflösung.

Läßt sich die gebrochene Funktion in eine Summe einfacher Brüche zerlegen, so verrichte man diese Arbeit und integrire jeden einzelnen Bruch besonders. Sollte dies aber nicht angehen können, so verwandele man dieselbe in eine unendliche Reihe und integrire jedes Glied.

Anfangsgründe der Geometrie.

Erster Theil
Von der ebenen Geometrie.

Erstes Kapitel.
Von den geraden Linien uud ebenen Winkeln.

§. 1.
Erklärung.

Eine ausgedehnte Größe heißt **stetig**, zusammenhängend (quantitas continua), wenn die Theile desselben also zusammenhängen, daß zwischen ihnen nichts gesetzet werden kann, was nicht zu dieser Größe gehörte. Ein Raum, welchen nach allen Seiten eine stetige ausgedehnte Größen ausfüllt, und in Gränzen eingeschloßen ist, wird ein geometrischer **Körper** genennt.

§. 2.
Erklärung.

Die Ausdehnung des mathematischen Körpers an seinen Gränzen heißt die **Oberfläche** deßelben (super-

(superficies), die Ausdehnung der Oberfläche an ihrer Gränze aber eine **Linie** (linea) und die Gränze der Linie ein **geometrischer Punkt** (punctum geometricum).

Anmerk. 1. Eine geometrische Oberfläche enthält nichts körperliches, demnach können auf einander gehäufte Oberflächen keinen Körper, an einander gelegte Linien keine Fläche, und neben einander gesetzte Punkte keine Linie ausmachen. Es kann aber ein jeder Körper, eine jede Oberfläche, und eine jede Linie überall Gränzen haben, weil diese aufhören können wo man will. Demnach kann ein jeder Körper überall Oberflächen, eine jede Fläche überall Linien, und eine jede Linie überall Punkte haben. Man kann sich also vorstellen, daß eine Linie durch die Bewegung eines Punktes erzeuget werde, nicht aber, daß eine Linie aus an einander gelegten Punkten bestehe. Denn so bald sich der Punkt von dem einem Orte zum andern fortbewegt, so kann man sich auch schon eine Entfernung von dem einen Orte zum andern gedenken, so nahe sie auch bey einander liegen, und diese Entfernung ist schon eine Linie, und die große Linie bestehet aus solchen kleinen Linien, nicht aus Punkten.

Anmerk. 2. Ein Tipfelchen und eine Linie mit einer zarten Feder auf dem Pappiere gemacht, bilden einen geometrischen Punkt und eine geometrische Linie ab, wenn man das Tipfelchen ganz ohne Ausdehnung und den Strich bloß als eine Länge betrachtet.

§. 3.

Erklärung.

Eine gerade Linie (fig. 1.) ab (linea recta) heißt diejenige, deren Theile sich nach einerley Richtung erstrecken, eine krumme aber (linea curua), die gar keine geradlinichten Theile besitzet, wie abcd (fig. 2.). Es ist daher eine gerade Linie ab, die sich von dem einem Punkte a bis zum andern b erstrecket von dem zwischen diesen Punkten liegenden Theile der krummen Linie verschieden, so nahe auch die beyden Punke in der krummen Lienie bey einander liegen mögen.

§. 4.

Forderungssatz.

Durch zwey Punkte a und b (fig. 1.) kann eine gerade Linie gezogen, und so wohl über b als rückwärts über a hinaus so weit verlängert werden, als man will.

§. 5.

Erklärung.

Eine Fläche, welche so beschaffen, daß eine jede gerade Linie, welche zwischen zweyen in derselben liegenden Punkten gezogen wird, ganz in derselben liegt, heißt eben (superficies plana). Läßt sich aber gar kein Theil auf einer Fläche angeben, der eben ware, so heißt sie krum. Es wird hier anfänglich vorausgesetzet, daß alle Punkte und Linien, welche in Betrachtung gezogen werden, ganz in ein und eben derselben Ebene befindlich sind, und die Gesetze stetiger ausgedehnter Größen, welche nach

dieser

dieser Voraussetzung zu erweisen sind, machen den ersten Hauptheil der Geometrie, nemlich die ebene Geometrie (geometria plana) aus.

§. 6.

Grundsatz.

Durch zwey Punkte a und b (fig. 1.) kann nur eine einzige gerade Linie gezogen werden, und die Lage derselben (positio) wird dadurch völlig bestimmt.

§. 7.

Zusatz.

Es können sich demnach zwey gerade Linien, welche nach verschiedenen Richtungen laufen, nur in einem einzigen Punkte schneiden, wenn sie gehörig verlängert werden, und sie haben ausser diesem Punkte nichts weiter mit einander gemein.

§. 8.

Erklärung.

Wenn zwey gerade Linien von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte a (fig. 3.) nach verschiedenen Richtungen laufen, so heißt der zwischen diesen beyden Linien nach den Endpunkte derselben noch unbegränzte Flächenraum ein ebener **Winkel** (angulus planus) oder schlechthin ein **Winkel**. Der gemeinschaftliche Punkt a wird der **Scheitel** oder **Spitze** (vertex) und die beyden Linien ab und ac die **Schenkel** oder **Seitenlinien** (crura s. latera) des Winkels genennt. Um einen Winkel zu bezeichnen, schreibt man an der Spitze und an jeder Seitenlinie

tenlinie einen Buchstaben, und nennt die Buchstaben in der Ordnung, daß derjenige, welcher die Spitze bezeichnet, in der Mitte stehe z. E. cab oder man schreibt in der Oefnung einen kleinern Buchstaben x, y u. s.

§. 9.

Erklärung.

Wenn ein Schenkel des Winkels bae (fig. 4.) in gerader Linie verlängert wird, so entsteht alsdenn noch ein anderer Winkel, welcher des Winkels bae **Nebenwinkel** genennet wird (angulus contiguus s. deinceps positus). Ein Winkel, der so groß ist als sein Nebenwinkel, heißt ein **rechter Winkel** (rectus), im Gegentheil ein **schiefer Winkel** (obliquus), und eine gerade Linie da steht auf einer andern geraden Linien bc **senkrecht, lothrecht, bleyrecht, perpendikulär** (perpendicaris s. normalis), wenn sie mit der andern geraden Linie bc gleiche Nebenwinkel macht, und sie steht schief (obliqua) auf derselben, wenn sie mit ihr ungleiche Nebenwinkel macht.

§. 10.

Erklärung.

Ausgedehnte Größen **paßen auf** oder **in einander**, wenn die Gränzen der einen ausgedehnten Größe mit den Gränzen der andern zusammenfallen.

§. 11.

Zusatz.

Alle ausgegehnte Größen, die auf oder in einander paßen, sind gleich groß, jedoch gilt dieser Satz nicht

nicht umgekehrt. Gerade Linien also und Winkel, die auf einander paßen, müßen gleich groß seyn, und hier findet der Satz auch umgekehrt statt, gleich große gerade Linien und Winkel paßen auf einander.

§. 12.

Zusatz.

Gerade Linien und Winkel, die nicht auf einander paßen, sind ungleich groß.

§. 13.

Lehrsatz.

Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Beweis

Es sey (fig. 4.) bad = R (wenn man den rechten Winkel durch den Buchstaben R hier und im folgenden ausdruckt), und auch bae = R; überdem bae > bad. Nun verlängere man ba nach c, so muß bad = dac, und daher auch bae = eac seyn. Nun soll aber auch bae > bad, mithin auch eac > dac seyn, welches unmöglich ist.

§. 14.

Zusatz.

Aus einerley Punkt a der geraden Linie bc kann nur eine einzige gerade senkrechte Linie errichtet werden.

§. 15.

Erklärung.

Jeder schiefe Winkel ist entweder größer als ein rechter oder kleiner; im ersten Falle heißt er ein

stumpfer (obtusus) und im zweyten ein spitzer Winkel (acutus).

§. 16.

Lehrsatz.

Die Summe zweyer Nebenwinkel bae + eac auf der geraden Linie bc sind zweyen rechten Winkeln gleich.

Auch umgekehrt, wenn zwey Winkel bae und eac, welche die gemeinschaftliche Spitze a und den gemeinschaftlichen Schenkel ae haben, zusammen zwey rechte Winkel betragen, so liegen die beyden andern Schenkel ba und ac in gerader Linie.

Beweis.

I. Satz. Aus dem Punkte a kann man die gerade senkrechte Linie ad errichten (§. 14.), alsdenn hat man bad + dac = 2R. Weil nun dac = dae + eac, so ist auch bad + dae + eac = 2R, oder bae + eac = 2R.

II. Satz. Wenn bae + eac = 2R. und ac mit ba nicht in gerader Linie wäre, so müßte ba nach f so verlängert werden können, daß af mit ac nicht zusammenfiele, alsdenn hätte man bae + eaf = 2R und bae + eac = 2R, mithin auch bae + eaf = bae + eac, und daher eaf = eac, welches nicht anders seyn kann, als wenn af mit ac zusammenfällt.

§. 17.

Erklärung.

Ein Winkel wie dae, welcher mit einem spitzen Winkel eac zusammengenommen einen rechten Winkel

kel macht, heißt des spitzen Winkels eac Ergänzung oder das Complement zu einem rechten Winkel; auch heißt allemal einer von den zweyen Nebenwinkeln des andern Ergänzung zu zweyen rechten Winkeln.

§. 18.

Erklärung.

Wenn sich zwey gerade Linien (fig. 5.) ab und cd in dem Punkte e schneiden, so nennt man alsdenn die einander entgegengesetzten Winkel ceb und aed oder bed und cea **Scheitelwinkel** (anguli verticales).

§. 19.

Lehrsatz.

Die Scheitelwinkel sind gleich groß
und umgekehrt, wenn ab eine gerade Linie ist und ceb = aed, so liegen ce und ed in gerader Linie.

Beweis.

I. Satz. Weil aed + deb = 2R, so wie auch ceb + bed = 2R. so hat man aed + deb = ceb + deb, mithin aed = ceb.

II. Satz. Weil bed + dea = 2R, und aed = ceb, so muß auch bed + ceb = 2R seyn, und eben darum liegt ce mit ed in gerader Linie.

Zweytes Kapitel.
Von dem Umfange der ebenen Figuren.

§. 20.
Erklärung.

Eine ebene von allen Seiten durch Linien begränzte Fläche heißt eine ebene **Figur** oder schlechthin eine Figur (figura plana), die Linien, welche die Figur umschließen, die **Seitenlinien**, und die Seitenlinien zusammengenommen der **Umfang**, **Perimeter** oder die **Peripherie** (perimeter, peripheria) der Figur.

§. 21.
Zusatz.

Zwey gerade Linien, also auch eine einzige gerade Linie können keine Figur umschließen, aber wohl eine einzige krumme Linie kann denn Umfang einer Figur ausmachen.

§. 22.
Erklärung.

In einer Figur sind entweder alle Seitenlinien gerade oder krumme oder beydes zugleich. Im ersten Falle heißt sie eine **geradlinichte**, im zweyten eine **krummlinichte**, und im dritten eine **vermischtlinichte Figur**. Uebrigens giebt man den Figuren Namen von der Anzahl ihrer Seitenlinien oder Winkel, weil eine Figur eben so viele Seitenlinien als Winkel hat. Es ist also leicht zu begreifen, was eine **dreyseitige**, **vierseitige** u. s. Figur sagen wol-

le. Dreyseitige und vierseitige nennt man kurz Dreyecke und Vierecke, die übrigen Figuren, welche mehr als vier Seitenlinien haben, heißen überhaupt Polygone oder Vielecke.

§. 23.

Zusatz.

Wenn innerhalb den Gränzen einer Figur (fig. 6.) ein Punkt e befindlich ist, und man zieht durch denselben die gerade Linie fg, so muß sie den Umfang derselben in zweyen Punkten schneiden, wenn sie gehörig verlängert wird. Läuft also eine gerade Linie durch die Spitze eines Winkels eines Dreyecks, so muß sie auch verlängert die ihr entgegengesetzte Seitenlinie schneiden. Auch wenn der Umfang einer Figur zum Theil innerhalb den Gränzen einer andern Figur fällt, so schneiden beyde Umfange einander wenigstens in zweyen Punkten.

§. 24.

Grundsatz.

Die kürzeste unter allen Linien, welche von a nach b (fig. 7.). gezogen werden können, ist die gerade Linie ab. Eine andere gebrochene oder krumme Linie zwischen eben den Endpunkten a und b wird desto größer, je weiter sie von der geraden Linie sich entfernet.

§. 25.

Zusatz.

Die Summe zweyer Seitenlinien in einem Dreyecke ist allemal größer als die dritte und wenn die

Spitze eines Dreyecks acb innerhalb der Fläche eines andern Dreyecks adb liegt, welches auf eben der Grundlinie ab steht, so ist ac + cb < ad + db.

§. 26.

Erklärung.

Die **Entfernung** eines Ortes zum andern ist der kürzeste Weg, den man nehmen kann, um von dem einen Orte zu den andern zu kommen.

§. 27.

Zusatz.

Also die Entfernung des einen Punktes von dem andern die gerade Linie zwischen beyden Punkten.

§. 28.

Erklärung.

Eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie also umschloßen wird, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb der Fläche angenommenen Punkte c gleich weit entfernet sind, heißt eine **Kreisfläche** oder kurz ein **Kreis** (circulus) (fig. 8.) Der Punkt c, von welchem alle Punkte der krummen Linie gleich weit entfernt sind, wird der **Mittelpunkt** des Kreises (centrum) und die krumme Linie abd die **Kreislinie** oder die **Peripherie** des Kreises genennt. Jedes Stück der Peripherie wie ad heißt ein **Kreisbogen**, und die gerade Linie ad zwischen den Endpunkten des Kreisbogens die dazu gehörige **Sehne** oder **Chorde** (chorda, subtensa).

§. 29.

§. 29.

Erklärung.

Die Sehne, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heißt der **Durchmeßer** (diameter) und die Helfte des Durchmeßers der **Halbmeßer** des Kreises (semidiameter s. radius).

§. 30.

Zusatz.

Alle Halbmeßer eines Kreises sind gleich groß, mithin auch alle Durchmeßer.

§. 31.

Zusatz.

Wenn die Entfernung eines Punktes e von dem Mittelpunkte des Kreises kleiner als der Halbmeßer ist, so liegt er innerhalb der Fläche deßelben, deßen Entfernung aber größer als der Halbmeßer ist, so liegt er außerhalb der Kreißfläche wie f. Eine Linie also, welche durch den Punkt e, deßen Entfernung von dem Mittelpunkte kleiner als der Halbmeßer ist, gehet, muß die Peripherie des Kreises in zweyen Punkten schneiden, mithin wird auch der Durchmeßer die Peripherie in zweyen Punkten schneiden, welche mit dem Mittelpunkt in gerader Linie liegen.

§. 32.

Erklärung.

Das Stück abc (fig. 9.) der Kreisfläche, welches zwischen zweyen Halbmeßer ac und cb sich befindet, heißt ein **Kreisausschnitt** oder **Sektor** (sector),

(sector), das Stück def aber zwischen der Sehne df und den Kreisbogen def ein **Kreisabschnitt** oder **Segment** (segmentum).

§. 33.

Zusatz.

Der Durchmeßer theilt den Kreis in zwey gleich große Abschnitte, welche Halbkreise heißen, und die ganze Peripherie in zwey gleich große Bogen.

§. 34.

Zusatz.

Wenn zwey Durchmeßer senkrecht einander schneiden, so theilen sie den Kreis in 4 gleich große Sektoren, und die Peripherie in 4 gleiche Bogen, welche **Quadranten** heißen.

§. 35.

Forderungssatz.

Wenn auf einer Ebene ein Punkt und die Größe des Halb- oder Durchmeßers gegeben worden, so kann man die Kreislinie in der Ebene verzeichnen.

§. 36.

Zusatz.

Ist also in einer geraden Linie ab (fig. 10.) ein Punkt c gegeben, so kann man mittelst der Kreislinie ein Stück cb oder ca abschneiden, welches so groß ist, als eine andere gegebene gerade Linie.

§. 37.

§. 37.

Lehrsatz.

Die Peripherien zweyer Kreise, die aus den Mittelpunkten a und b (fig. 11. 12.) sind beschrieben worden, schneiden einander, wenn die Entfernung der Mittelpunkte kleiner als die Summe der Halbmeßer.

Beweis.

Es ist ec der Durchmeßer des Kreises hcge und df der Durchmeßer des andern Kreises hdgf. Nun soll nach der Voraussetzung ab $<$ ac + db seyn, also ab — db $<$ ac oder ad $<$ ac, folglich liegt der Punkt d innerhalb des Kreises hcge (§. 31.) eben so ist auch cb $<$ bd und der Punkt c liegt innerhalb des andern Kreises hfgd, demnach fällt ein Stück von der Kreißfläche hfgd innerhalb der Fläche des des andern Kreises hcge, und beyde Kreise schneiden einander (§. 23.). Ferner soll (fig. 12.) ba $<$ ae + bf seyn, also ba — bf $<$ ae oder — af $<$ ae d. heißt der Mittelpunkt des Kreises hcge liegt in der Fläche des andern Kreises fghd, und der Punkt f in der Fläche des Kreises ehcg. Aus eben dem Grunde ist auch — bc $<$ bd, und der Punkt c muß ebenfalls in der Fläche des Kreises fhgd liegen, folglich fällt wiederum ein Stück von der Kreisfläche fhdg innerhalb der Fläche des andern Kreises ehcg, und beyden Kreise schneiden einander (§. 23.)

§. 38.

Zusatz.

Kreise, die einander schneiden, haben nicht einerley Mittelpunkt, aber eine gemeinschaftliche Sehne hg

durch die Durchschnittspunkte, die Mittelpunkte können hingegen auf verschiedenen Seiten oder auf einer Seite der Sehne liegen.

§. 39.

Erklärung.

Kreise, welche einerley Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise, welche aber nicht einerley Mittelpunkt haben, eccentrische Kreise.

§. 40.

Erklärung.

Eine Kreislinie berührt die andere, wenn jene mit dieser zwar zusammenfällt, sonst aber weiter nichts mit einander gemein haben.

§. 41.

Zusatz.

Concentrische Kreislinien können sich weder schneiden noch berühren. Wenn man die Fläche des kleinern Kreises von dem größern wegnimmt, so heißt die Fläche dea b fg (fig. 13.) welche zwischen den Periphrieen enthalten ist, ein Ring (annulus s. corona).

§. 42.

Lehrsatz.

Zwey Kreislinien können sich nur alsdenn berühren, wenn die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise entweder der Summe der Halbmeßer oder der Differenzen derselben gleich ist.

Beweis.

Beweis.

Sind a und b (fig. 14.) die Mittelpunkte, so ist ac = ab — cb. Setzt man nunmehr des um a beschriebenen Kreises Halbmesser = r, so ist nach der Voraussetzung r + cb = ab oder r = ab — cb, folglich r = ac, und die Kreislinie des Kreises a geht durch c. Gesetzt nun beyde Kreislinien hätten ausser dem Punkte c noch den Punkt d gemein, so kann man bd und ad ziehen, und es ergiebt sich das Dreyeck abd, also muß bd + ad > ab oder bd + ad > bc + ca seyn (§. 25.) Weil nun ca = ad, so muß auch bd > bc seyn, und der Punkt d fällt ausserhalb des einen Kreises, und kann also kein Berührungspunkt seyn (§. 23.). Es ist ferner (fig. 15.) ae = be — ba. Setzt man nun den Halbmesser des Kreises um a = r, so ist nach der Voraussetzung be — r = ba, also auch ab + r = be und r = be — ab, folglich r = ae, und der um a beschriebene Kreis geht durch e. Hätten sie ausser e noch einen andern Punkt f mit einander gemein, so kann man bf und af ziehen, und es ist bf < ab + af (§. 25.) Nun ist af = ae, mithin bf < ab + ae, oder bf < be, folglich kann f kein Berührungspunkt seyn. (§. 23.).

§. 43.

Zusatz.

Zwey Kreislinien berühren also einander so, daß die Fläche des einen Kreises entweder ganz ausserhalb des andern oder ganz innerhalb desselben fällt.

§. 44.

Lehrsatz.

Die Mittelpunkte a und b zweyer Kreise, deren Peripherien einander berühren, liegen mit dem Berührungspunkte in gerader Linie.

Beweis.

Wenn d (fig. 14.) der Berührungspunkt wäre, und ab nicht durch d liefe, so kann man doch ad und bd ziehen, und dadurch das Dreyeck abd erhalten. Es ist aber bd + da $\geq$ ba oder bd + da $\geq$ bc + ca. Weil nun ca $=$ ad, so muß bd $\geq$ bc. folglich auch d ausserhalb des um b beschriebenen Kreises befindlich, und kann daher nicht der Berührungspunkt seyn. Eben so ist auch (fig. 15.) fb $<$ fa + ab. Nun ist aber fa $=$ ae, mithin ist auch fb $<$ ab + ae oder fb $<$ be, folglich liegt der Punkt f schon innerhalb des Kreises um b, und kann nicht der Berührungspunkt seyn. Demnach müßen die Mittelpunkte beyder Kreise mit dem Berührungspunkte, in gerader Linie liegen.

§. 45.

Lehrsatz.

Kreislinien und Kreisflächen, deren Halb- oder Durchmeßer gleich groß sind, sind ebenfalls gleich groß.

Beweis.

Legt man die eine Kreisfläche so auf die andere, daß beyder Mittelpunkte zusammenfallen, so fällt ein jeder Halbmeßer des einen Kreises auf jeden des andern, also fällt auch jeder Punkt der einen Periphe-

rie auf jeden Punkt der andern, und die Kreislinien so wohl als Kreisflächen paßen auf einander, und sind folglich gleich (§. 11.).

§. 46.

Zusatz.

Kreislinien so wohl als Kreisflächen sind ungleich groß, wenn die Halbmeßer ungleich groß sind; gleiche Kreise haben also gleiche Halb- und gleiche Durchmeßer.

§. 47.

Zusatz.

Sektoren gleicher Kreise, wenn die Winkel am Mittelpunkte gleich sind, sind ebenfalls gleich groß, so wie ihre Bogen. Demnach gehören auch zu gleich grossen Bogen oder Sektoren solcher Kreise, die einerley Halbmeßer haben, gleiche Winkel am Mittelpunkte.

§. 48.

Zusatz.

Wenn die Winkel am Mittelpunkte in Ausschnitten gleicher Kreise ungleich groß sind, so sind auch die Sektoren und Bogen ungleich groß.

Drittes Kapitel.

Von den Dreyecken, Parallellinien und Parallellogrammen.

§. 49.

Erklärung.

Was vor eine Lage eine gerade Linie in einer Ebene habe, läßt sich nicht angeben, woferne nicht

die

die Lage einer andern geraden Linie in eben derselben Ebene als bekannt angenommen wird. Alsdenn wird die Lage der Linie ab (fig. 16.) gegen die Lage der Linie bc durch den Winkel abc bestimmt, welcher der Abweichungswinkel der Lage der Linie ab von der Lage der geraden Linie bc genennet wird.

§. 50.

Zusatz.

Zwey Linien haben gegen eine dritte einerley Lage, wenn sie dieselbe unter gleiche übereinstimmig liegende Winkel schneiden.

§. 51.

Lehrsatz.

Wenn der Abweichungswinkel der Lage der Linie ac (fig. 17) gegen ab = cab, und ferner der Abweichungswinkel der Lage der Linie ed von der Lage der Linie ac = edc, so ist der Abweichungswinkel der Lage der Linie ed von der Lage der Linie ab so groß, als beyde Winkel edc und dab zusammengenommen.

Beweis.

Ein jeder Theil einer geraden Linie hat einerley Lage mit der ganzen geraden Linie (§. 6.). mithin muß der Abweichungswinkel der Linie ed gegen ab so groß seyn als der von eb ist. Es sey nun der Winkel fad = edc, so ist der Abweichungswinkel der Lage der Linie fa gegen ab = fad + dab, und gegen ac = fad = edc. Demnach hat die Linie eb, also auch ed mit fa einerley Lage gegen ab, mithin

hin ist auch der Abweichungswinkel der Lage der Linie ed von der Lage der Linie ab = fad + dab = edc + dab.

§. 52.

Lehrsatz.

Wenn in dem Dreyecke abd (fig. 17.) der eine Schenkel ab nach g verlängert wird, so ist der dadurch entstandene äußere Winkel dbg gleich den beyden innern entgegengesetzten Winkeln dab und adb zusammengenommeu.

Beweis.

Man nehme den Winkel fac = edc, so ist edc + dab = fac + dab. Es ist aber fac + dab = dbg (§. 50.), weil beyde Linien gegen ag einerley Lage haben, folglich auch edc + dab = dbg. Nun ist ferner edc = adb (§. 18.), mithin adb + dab = dbg.

§. 53.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke ist die Summe aller dreyer Winkel zweyen rechten Winkeln gleich.

Beweis.

Es ist dbg = dab + adb (§. 52.); aber dba + dbg = 2R (§. 16.), mithin auch dab + adb + dba = 2R.

§. 54.

Zusatz.

Wenn also in einem Dreyecke ein Winkel ein rechter oder ein stumpfer ist, so müßen die beyden übrigen spitz seyn.

§. 55.

§. 55.

Zusatz.

Durch einerley Punkt d über einer geraden Linie ag kann nur eine einzige senkrechte Linie auf ag gezogen werden.

§. 56.

Erklärung.

In einem Dreyecke sind entweder alle Seiten einander gleich oder nicht. Im ersten Falle heißt das Dreyeck ein **gleichseitiges** (aequilaterum triangulum); im zweyten Falle aber sind entweder noch zwey Seiten einander gleich, oder gar keine. Jenes nennt man ein **gleichschenklichtes** (aequicrurum, isopleuron, isosceles), und dieses ein **ungleichseitiges** (scalenum). Ferner hat ein Dreyeck entweder einen rechten oder stumpfen oder lauter spitze Winkel, da es alsdenn ein **rechtwinklichtes** (rectangulum), **stumpfwinklichtes** (obtusangulum) und ein **spitzwinklichtes** (acutangulum) genennt wird. Bey einem rechtwinklichten Dreyecke pflegt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberstehet, die **Hypothenuse**, und die beyden übrigen, welche den rechten Winkel einschliessen, die **Catheti** oder **Perpendikulärseiten** zu nennen.

§. 57.

Lehrsatz.

Wenn zwey Seitenlinien mit dem eingeschloßenen Winkel in dem einen Dreyecke gleich in den andern

dern sind, so sind auch die beyden übrigen Winkel und die dritte Seite in beyden Dreyecken gleich groß.

Beweis.

Es sey (fig. 18.) ac = df; ab = de und a = d. Man lege nun das Dreyeck dfe auf acb so, daß d auf a, df auf ac und de auf ab fallen, so wird auch f auf c, und e auf b fallen, mithin decken ef, bc; die Winkel e, b; f, c und folglich die ganzen Flächen der Dreyecke.

§. 58.

Zusatz.

Es sey ac = cb und df = fe, oder beyde Dreyecke seyn gleichschenklicht, so kann man auch den Winkel e auf a, ef auf ac, und df auf cb legen, und es wird sich alles decken, also sind in einem gleichschenklichten Dreyecke die Winkel an den gleichen Seiten gleich groß.

§. 59.

Zusatz.

Eine gerade Linie cd (fig. 19.), welche den Winkel c des gleichschenklichten Dreyecks abc in zwey gleiche Theile theilt, theilt zugleich die Grundlinie ab und das ganze Dreyeck in zwey gleiche Theile, und steht auf der Grundlinie senkrecht.

§. 60.

Zusatz.

Wenn in dem gleichschenklichten Dreyecke abc die eine von den gleichen Seitenlinien ac nach f verlängert wird, so ist der äussere Winkel fcb doppelt

so groß als ein jeder von den gleichen Winkeln an den gleichen Seitenlinien.

§. 61.

Zusatz.

Wenn in der Mitte der Grundlinie ab des gleichschenklichten Dreyecks eine senkrechte gerade Linie dc errichtet wird, so muß sie den Winkel c in der Spitze in zwey gleiche Theile theilen, und das ganze Dreyeck halbiren. Auch eine Linie dc aus der Spitze des Winkels c auf die Mitte der Grundlinie gezogen muß senkrecht auf derselben stehen, den Winkel c so wohl als auch das ganze Dreyeck in zwey gleiche Theile theilen.

§. 62.

Lehrsatz.

Wenn in beyden Dreyecken (fig. 18.) abc und def die Seitenlinie ac = df, und die anliegenden Winkel a = d und c = f oder c = f und b = e, so ist alles in beyden Dreyecken gleich.

Beweis.

Aus dem, daß a = d und c = f, folgt auch, daß b = e. Legt man also die Spitze d auf a, so fällt de längst ab, und df längst ac, und weil df = ac, der Punkt f auf c. Da nun ferner c = f, so fällt auch fe längst cb, und die Dreyecke decken einander.

§. 63.

Zusatz.

Ist a = b, also auch d = e, so können die Dreyecke auch so auf einander gelegt werden, daß e auf a, d auf

d auf b und doch noch f auf c fällt, folglich sind nun ca = fe und df = cb, mithin auch ac = fe.

§. 64.

Zusatz.

Sind also in einem Dreyecke die Winkel a und b an der Grundlinie ab gleich groß, so sind auch die den gleichen Winkeln entgegengesetzten Seitenlinien ac und cb gleich groß; demnach sind auch in einem gleichseitigen Dreyecke alle Winkel gleich, und wenn in einem Dreyecke alle Winke gleich, so ist es gleichseitig.

§. 65.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreyecke (fig. 20.) abc zwey Seiten ab und bc ungleich groß, so ist der größern Seite bc ein größerer Winkel bac als der kleinern ab entgegengesetzt.

Beweis.

Man mache bd = ab und ziehe ad, so ist abd ein gleichschenklichlichtes Dreyeck, mithin der Winkel bad = bda. Nun ist aber bac > bad mithin auch bac > bda; aber bda > dca (§. 52) folglich um so mehr bac > dca.

§. 66.

Zusatz.

In einem rechtwinklichten Dreyecke ist die Hypothenuse, und in einem stumpfwinklichten die dem stumpfen Winkel entgegengesetzte Seitenlinie die größeste

§. 67.

Zusatz.

Aus einem Punkte c (fig. 19.) ist die senkrechte Linie cd die kürzeste, welche von allen geraden Linien aus c auf die gerade Linie ab gezogen werden kann, mithin die Entfernung des Punktes c von der geraden Linie ab (§. 24.)

§. 68.

Lehrsatz.

Eine gerade Linie (fig. 19.) aus der Spitze c des gleichschenklichten Dreyecks abc innerhalb der Fläche desselben auf die Grundlinie ab gezogen ist kleiner als eine von den gleichen Seitenlinien ac oder cb, hingegen eine jede gerade Linie aus der Spitze c auf die verlängerte Grundlinie ausserhalb des Dreyecks gezogen ist größer als eine von den gleichen Seitenlinien.

Beweis.

Die senkrechte Linie cd ist unter allen geraden Linien, welche aus dem Punkte c auf af gezogen werden können, die kürzeste (§. 67.). Weil nun ceb, cbg u. s. stumpfe Winkel sind so ist auch cb > ce und cg < cb (§. 65.).

§. 69.

Zusatz.

Aus einerley Punkte c können demnach nicht mehr als zwey gleich große gerade Linien auf ag gezogen werden.

§. 70.

§. 70.

Lehrsatz.

Wenn in beyden Dreyecken (fig. 18.) abc und def die eine Seitenlinie ac = df, der Winkel a = d, und die gegenüberstehende Seitenlinie cb = fe, ausserdem aber bc > ac, also auch fe > fd, so ist alles in beyden Dreyecken gleich.

Beweis.

Man lege die Spitze des Winkels d auf a, so fällt de längst ab, und df längst ac und der Punkt f auf c. Nun fällt e entweder auf g oder auf h oder auf b. Ih das erste, so muß gc = fe = cb, also cgb ein gleichschenklichtes Dreyeck seyn, und daher ca > cb wider die Voraussetzung. Ist aber das zweyte, so muß abermals fe = ch = cb, und cbh ein gleichschenklichtes Dreyeck seyn, und ca > ch wieder die Voraussetzung, folglich ist ab = de und der Punkt e fällt auf b, und beyde Dreyecke paßen aufeinander.

§. 71.

Zusatz.

Sind also in zweyen rechtwinklichten Dreyecken nicht nur die Hypothenusen, sondern auch eine von den Perpendikulärseiten gleich groß, so paßen die Dreyecke auf einander.

§. 72.

Lehrsatz.

Wenn man über der Grundlinie (fig 21.) ab des Dreyecks adb ein anderes Dreyeck verzeichnet,

welches bey a einen kleinern Winkel als das vorige hat, die anliegenden Seiten aber gleich groß bleiben, so wird die dem kleinern Winkel bey a entgegengesetzte Seite kleiner als sie vorher war.

Beweis.

Man verzeichne mit dem Halbmeßer ad den Kreisbogen defc, so kann das verlangte Dreyeck nicht anders beschaffen seyn, als daß es die Spitze irgendwo in diesem Bogen habe, also entweder 1) in dem Durchschnittspunte f, oder 2) ausserhalb des Dreyecks in dem Punkte e, oder 3) innerhalb des Dreyecks in dem Punkte g. Was das erste betrift, so ist schon für sich klar, daß bf < db. Ist aber das zweyte, so ziehe man de und eb und ea, so ist der Winkel ade = aed, also bde < ade oder bde < aed, mithin um so mehr bde < bed, folglich auch eb < da (§. 65.). Ist endlich das dritte, so hat man ag + gb < ad + db (§. 25). Nun ist aber ag = ad, mithin gb < db.

§. 73.

Lehrsatz.

Wenn in dem einen Dreyecke (fig. 18.) die Seitenlinien gleich den Seitenlinien des andern Dreyecks sind, nemlich ab = de, ac = df und cb = fe, so ist in beyden Dreyecken alles gleich groß.

Beweis.

Weil ab = de, ac = df und cb = af, so kann der Winkel fde nicht größer oder kleiner als cab seyn (§. 72.), denn sonst müßte im ersten Falle fe

> cb

> cb und im zweyten Falle fe < cb seyn, welches der Voraussetzung entgegen, mithin decken beyde Dreyecke einander.

§. 74.

Aufgabe.

Es sind drey gerade Linien gegeben, wovon zwey zusammengenommen größer als die dritte, man soll ein Dreyeck verzeichnen.

Auflösung.

Man nehme eine Linie z. E. (fig. 22.) a zur Grundlinie des Dreyecks an, beschreibe alsdenn aus dem Punkt d mit dem Halbmeßer b und aus dem Punkte e mit dem Halbmeßer c Kreisbogen, welche sich in dem Punkte f schneiden, und man kann nun df und fe ziehen, um das verlangte Dreyeck zu erhalten.

§. 75.

Zusatz.

Aus drey gegebenen Linien läßt sich demnach nur ein einziges Dreyeck machen, ob man gleich demselbigen verschiedene Stellungen geben kann.

§. 76.

Zusatz.

Ueber einer gegebenen Linie verzeichnet man eben so ein gleichschenklichtes und gleichseitiges Dreyeck.

§. 77.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie ab (fig. 23.) in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man verzeichne über und unter der geraden Linie ab gleichschenklichte Dreyecke abc und abe, ziehe alsdenn durch beyder Spitzen c und e die gerade Linie ce, diese theilet ab in d in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Vermöge der Verzeichnung ist ac = cb und ae = eb, ausserdem ce = ce, mithin das Dreyeck acd = ceb, und demnach der Winkel acd = dcb. folglich auch ad = db (§. 59.).

Anmerk. Durch fortgesetztes Halbiren läßt sich die gerade Linie in 4, 8, 16, 32 u. s. Theile theilen so daß die nte Halbirung 2^n Theile giebt.

§. 78.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel (fig. 24.) bac in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man nehme ab = ac und ziehe bc, alsdenn verzeichne man über bc das gleichschenklichte Dreyeck bdc, die gerade Linie da halbiret den Winkel a.

Beweis.

Vermöge der Verzeichnung ist ab = ac und bd = cd, und ad = ad, folglich das Dreyeck bda = adc und daher der Winkel bad = dac.

Anmerk. Auch hier giebt die nte Halbirung 2^n Theile.

§. 79.

Aus einem gegebenen Punkte d (fig. 19.) auf der geraden Linie ag eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung.

Man mache da = db und verzeichne über ab das gleichschenklichte Dreyeck acb, die gerade Linie cd steht in dem Punkte d auf ag senkrecht.

Beweis.

Weil da = db, ac = cb und cd = cd, so ist auch das Dreyeck acd = cdb, und daher der Winkel eda = cdb.

§. 80.

Aufgabe.

Durch einen Punkt c (fig. 25.) über der geraden Linie ab eine senkrechte Linie auf ab zu ziehen.

Auflösung.

Man beschreibe mit dem Halbmeßer ac einen Kreis, welcher die gerade Linie ab in den Punkten a und b schneide, darauf verzeichne man über ab das gleichschenklichte Dreyeck aeb, deßen Spitze e nicht in den Punkt c fällt, die Linie cd wird das verlangte Loth seyn.

Beweis.

Es ist ac = cb, ae = eb und ce = ce, mithin der Winkel acd = dcb, und eben daher der Winkel adc = cdb, mithin cd auf ab senkrecht (§. 59.).

§. 81.

Aufgabe.

Auf das Ende d (fig. 26.) einer gegebenen geraden Linie de eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung.

Man nehme auf der gegebenen geraden Linie ein Stück db willkührlich an, verzeichne über db das gleichschenkliche Dreyeck dcb, verlängere cb nach a, so daß ca = cb wird, und ziehe die Linie ad, welche die verlangte senkrechte Linie seyn wird.

Beweis.

Es ist dcb + cdb + cbd = 2R und acd + cad + cda = 2R, mithin dcb + cdb + cbd + acd + cad + cda = 4R, Ferner ist aber auch acd + dcb = 2R, folglich cdb + cbd + cad + cda = 2R. Weil nun acd so wohl als cdb gleichschenklichte Dreyecke, folglich cad = cda und cdb = cdb, so hat man auch 2adc + 2cdb = 2R oder 2(adc + cdb) = 2R, und daher adc + cdb = R, demnach ad auf de senkrecht.

§. 82.

Erklärung.

Gerade Linien fg und ab (fig. 27.), die in einerley Ebene eine solche Lage gegen einander haben, daß sie nie zusammenstoßen können, man mag sie auf beyden Seiten verlängern, so weit man will, heißen **Parallellinien.**

Anmerk. Um auszudrucken, daß Linien einander parallel sind, pflegt man das Zeichen ∥ zu gebrauchen.

§. 83.

Zusatz.

Parallelle Linien müßen also in einerley Ebene einerley Lage haben, denn hätten sie nicht einerley Lage, so müßten sie verlängert irgendwo zusammenstoßen (§. 50.), mithin umgekehrt, Linien, welche in einer Ebene einerley Lage haben, sind parallel.

§. 84.

Aufgabe.

An einer gegebenen Linie de (fig. 18.) einen Winkel fed zu verzeichnen, der so groß ist, als ein anderer gegebenen Winkel abc.

Auflösung.

Man nehme ab = bc und ziehe ca, darauf mache man ed = ba, beschreibe mit dem Halbmeßer de aus e und mit dem Halbmeßer ac aus d Kreisbogen, welche sich in f schneiden. Aus diesem Punkte ziehe man die geraden Linien fe und fd, so wird der Winkel fed = cba seyn; denn beyde Dreyecke abc und dfe sind einander gleich.

§. 85.

Aufgabe.

Durch einen Punkt c (fig. 27.) eine gerade Linie fg zu ziehen, welche mit ab parallel ist.

Auflösung.

Man nehme in der geraden Linie ab den Punkt h willkührlich an, ziehe alsdenn durch die Punkte c und h die gerade Linie ed, und mache den Winkel dcg = chb, so wird fg mit ab parallel seyn.

Beweis.

Beweis.

Zwey gerade Linie fg und ab haben gegen eine dritte ed einerley Lage, wenn sie dieselbe unter gleiche übereinstimmige ligende Winkel schneiden (§. 50.). Weil nun der Winkel dcg = chb, so müßen die Linien fg und ab gegen die dritte Linie ed einerley Lage haben, folglich auch fg mit ab parallel seyn (§. 83.).

§. 86.

Zusatz.

Es ist fch = dcg; ist nun dcg = chb, so ist auch fch = chb; wenn also die so genannten **Wechselwinkel** fch und chb einander gleich sind, so muß fg mit ab parallel seyn.

§. 87.

Weil ferner dcg + gch = 2R, und dcg = chb, so ist auch fch = chb; wenn also die so genannten **innern Winkel** gch und chb zweyen rechten Winkeln gleich sind, so muß abermals fg mit ab parallel seyn.

§. 88.

Zusatz.

Zwey gerade Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehen, laufen mit einander parallel.

§. 89.

Aufgabe.

Es sey der Winkel a nebst der Seite ab gegeben (fig. 28.) man soll ein Dreyeck verzeichnen, in welchem

welchem der Winkel, welcher der Seite ab entgegengesezt ist, kleiner als jeder nach so kleine gegebene Winkel wird.

Auflösung.

Weil der andere Schenkel af noch unbestimmt ist, so nehme man einen Punkt d nach Belieben an, und ziehe die gerade Linie db. Nun mache man de = db und ziehe be, so ist bde ein gleichschenklichtes Dreyeck, und daher der Winkel bda = 2bed, oder $\frac{1}{2}$ bda = bed (§. 60.). Ferner nehme man ef = eb und ziehe fb, so ist nunmehr der Winkel bed = 2efb oder $\frac{1}{2}$ bed = efb = $\frac{1}{2}$ bda. Fährt man so fort, so wird der Winkel an der Spitze in jedem folgenden Dreyecke halb so groß, als er im vorigen war, mithin endlich kleiner als jeder noch so kleine gegebene Winkel.

§. 90.

Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien (fig. 29.) ab und cd von einer dritten efso geschnitten werden, daß die beyden innern Winkeln < 2R so laufen cd und ab nach eben der Seite verlängert zusammen.

Beweis.

Man nehme den Winkel eih = bki, so ist hik + ikb = 2R (§. 87.). Nun soll dik + ikb < 2R seyn, mithin auch hik + ikb < dik + ikb oder hik < dik, folglich muß da zwischen ih und ik liegen, und hid ist ein gegebener Winkel. Nun nehme man ik und den Winkel ikb als gegeben an, und verzeichne

über

über ik ein Dreyeck ilk, in welchem der Winkel ilk, welcher der Seite ik entgegengesetzt ist, ∠ hid ist; alsdenn ergiebt sich hik = hid + dik, folglich hik + ikb = hid + dik + ikb; nun war hik + ikb = 2R, mithin auch hid + dik + ikb = 2R. Aber auch im Dreyeck kil ist kil + ikb + kli = 2R, demnach hid + dik + ikb = kil + ikb + kli oder hid + dik = kil + kli. Nun ist ilk ∠ hid vermöge der Verzeichnung, mithin dik ∠ lik, und id muß zwischen il und ik fallen, folglich gewiß kl schneiden (§. 23.).

§. 91.

Lehrsatz.

Wenn zwey parallelle Linien von einer dritten geschnitten werden, so ist die Summe der beyden innern Winkel (fig. 27.) gch + chb = 2R.

Beweis.

Wäre gch + chb ∠ 2R, so stießen sie nach eben der Seite hin verlängert zusammen (§. 90.). Wäre aber gch + chb ∠ 2R, so hat man doch gch + hcf = 2R, und bhc + cha = 2R, mithin gch + hcf + bhc + cha = 4R. Ist nun gch + chb ∠ 2R, so ist hcf + cha ∠ 2R, und fg und ab müßten auf dieser Seite verlängert zusammenstoßen.

§. 92.

Zusatz.

Lauffen die Schenkel zweyer Winkel mit einander parallel, so müßen sie gleich groß seyn.

§. 93.

§. 93.

Zusatz.

Wenn von zweyen Parallellinien die eine durch eine dritte gerade Linie geschnitten wird, so muß auch die andere von eben derselben gehörig verlängert geschnitten werden.

§. 94.

Zusatz.

Zwey gerade Linien, welche mit einer dritten parallel laufen, sind unter sich parallel.

§. 95.

Zusatz.

Wenn zwey Linien ungleich weit von einander entfernet sind, so laufen sie nach der kleinern Entfernung hin zusammen. Ist nehmlich (fig. 30.) ae ∧ cd, so hat man eac + aed < 2R mithin müßen ab und ef nach b und f verlängert zusammenstoßen. Parallelle Linien sind demnach gleich weit von einander entfernt.

§. 96.

Erklärung.

Ein Viereck, worinn die entgegengesetzten Seitenlinien mit einander parallel laufen, heißt ein **Parallellogramm**. Sind in einem Vierecke nur zwey entgegengesetzte Seiten mit einander parallel, so wird es ein **Trapezium**, und wenn gar keine Seite mit der ihr entgegengesetzten parallel ist, ein **Trapezoides** genennt.

§. 97.

Erklärung.

Eine gerade Linie, welche aus der Spitze des einen Winkels nach der Spitze eines andern in einer geradlinichten Figur gezogen wird, und überdem ganz in der Fläche desselben liegt, heißt eine **Diagonallinie der Figur.**

§. 98.

Zusatz.

Eine jede geradlinichte Figur läßt sich mittelst der Diagonallinien in so viel Dreyecke theilen, als die Zahl der Seitenlinien weniger zwey angiebt; demnach läßt sich ein jedes Viereck in zwey Dreyecke theilen, und weil jedes Dreyeck zwey rechte Winkel faßet, so müßen in jedem Vierecke vier rechte Winkel seyn.

§. 99.

Lehrsatz.

Wenn ab und cd (fig. 31.) zwey gleich große parallelle Linien sind, und man ziehet die Endpunkte a und c; so wie b und d durch die geraden Linien ac und bd zusammen, so ist abdc ein Parallellogramm.

Beweis.

Man ziehe die Diagonallinie bc, so ist der Winkel cba = bcd (§. 87.), ab = cd und cb = cb, demnach der Winkel cbd = bca, und daher db mit ac parallel, folglich auch abdc ein Parallellogramm.

§. 100.

§. 100.

Zusatz.

In einem Parallellogramm sind die entgegengesetzten Seiten und Winkel gleich groß.

§. 101.

Zusatz.

Man kann also vermittelst der Diagonallinie ein jedes Parallellogramm in zwey gleich große Dreyecke theilen.

§. 102.

Erklärung.

In einem Parallellogramm sind die Winkel entweder rechte Winkel oder schiefe. Ist das erste, so sind entweder auch alle Seiten gleich oder nur die einander entgegengesetzten. Jenes Parallellogramm nennt man ein Quadrat, und dieses ein Rechteck oder Oblongum. Ist aber das zweyte, so sind entweder alle Seiten gleich groß oder nur die entgegengesetzten. Jenes nennt man eine Raute oder Rhombus und dieses eine länglichte Raute oder Rhomboides.

§. 103.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel cab (fig. 31.) nebst den beyden Seiten ab und ac gegeben, man soll aus diesen Stücken ein Parallellogramm verzeichnen.

Auflösung.

Man beschreibe mit dem Halbmesser ab aus dem Punkte c und mit dem Halbmesser ac aus dem Punkte

b Kreislinien, die sich in dem Punkte d schneiden, und ziehe die geraden Linien bd und cd, so wird acbd das verlangte Parallellogramm seyn.

§. 104.

Zusatz.

Ist b (fig. 32.) ein rechter Winkel und ba = be, so wird das Parallellogramm abef ein Quadrat, wenn aber da (fig. 34.) nicht gleich dc, so ist es ein Rechteck. Ist ferner d (fig. 33.) ein schiefer Winkel und ad = dc, so wird es eine Raute, sonst aber (fig. 31.) ein Rhomboides.

§. 105.

Zusatz.

Zwey Quadrate, welche gleiche Seitenlinien haben, paßen auf einander, und sind daher gleich groß (§. 11.). Sind also auch umgekehrt zwey Quadrate gleich groß, so sind auch die Seitenlinien gleich. Hingegen zwey Quadrate, welche ungleiche Seitenlinien haben sind auch ungleich groß, das größere (fig. 32.) ae steht auf der größern af und das kleinere ag auf der kleinern Seitenlinie ac.

§. 106.

Erklärung.

Die Höhe eines Parallellogramms ist die Entfernung der einen Seitenlinie von der ihr entgegengesetzten, welche man als die Grundlinie annimmt. Also ist die Höhe eines rechtwinklichten Parallellogramms die an der angenommenen Grundlinie anliegende Seitenlinie. Die Höhe eines Dreyecks

aber

aber ist die Entfernung der Spitze des Winkels von der entzegengesetzten im Dreyeck angenommenen Grundlinie. Wenn also in einem rechtwinklichten Dreyecke die eine Perpendikulärseite als die Grundlinie angenommen wird, so ist die andere die Höhe des Dreyecks. Nimmt man aber in einem stumpfwinklichten Dreyeck die eine am stumpfen Winkel anliegende Seite zur Grundlinie an, so muß man diese so weit verlängern, bis man aus der Spitze des entgegengesetzten Winkels die senkrechte Linie als die Höhe des Dreyecks herablaßen kann.

§. 107.

Lehrsatz.

Zwey Parallellogramme, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, sind gleich groß.

Beweis

Es ist (fig. 35.) ab = cd = ef, also ab + be = ef + be oder ae = bf, ferner ac = bd und ce = df, mithin das Dreyeck ace = bdf. Subtrahirt man nun von beyden Dreyecken das kleine Dreyeck bge, so muß ace — bge = bdf — bge oder das Trapez. acgb = Trapez. dgef, und aus diesem Grunde auch acgb + cdg = defg + cdg oder abcd = ecdf.

§. 108.

Zusatz.

Zwey Dreyecke, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, müßen demnach gleich seyn, denn sie sind die Helften von zweyen gleich großen Parallellogrammen (§. 101.)

§. 109.

Zusatz.

Ein Dreyeck ist halb so groß als ein Parallelogramm, welches mit jenem gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

§. 110.

Zusatz.

Man addiret zwey oder mehrere Parallelogramme oder Dreyecke von gleicher Höhe und verschiedener Grundlinie wenn man an das eine Parallelogram oder Dreyeck ein oder mehrere den andern Parallellogrammen oder Dreyecken gleiche ansetzet.

§. 111.

Aufgabe.

Ein Parallellogramm zu verzeichnen, welches so groß als ein gegebenes Dreyeck ist.

1. Auflösung.

Man theile die Höhe des Dreyecks acb (fig. 36.) in e in zwey gleiche Theile, ziehe alsdenn durch diesen Theilungspunkt die Linie gf mit der Grundlinie ab parallel, ferner ziehe man bf mit ag parallel so wird das Parallellogramm so groß als das Dreyeck seyn.

2. Auflösung.

Man theile die Grundlinie ab (fig. 37.) in d n zwey gleiche Theile, ziehe alsdenn durch diesen Theilungspunkt die Linie gf mit ab parallel, aus dem Punkte a ziehe man ferner die Linie af und aus d

die

die Linie dg mit af parallel, so wird das Parallellogramm dgfa so groß als das Dreyeck acb seyn.

Anmerk. Ist der Winkel bey a ein rechter Winkel, so wird das Parallellogramm ein Rechteck, und es läßt sich daher ein jedes Dreyeck in ein eben so großes Rechteck verwandeln.

§. 112.

Aufgabe.

Ein Parallellogramm zu verzeichnen, das so groß als ein gegebenes Dreyeck ist, und eine Seite von gegebener Größe hat.

Auflösung.

Man verzeichne das Parallellogramm (fig. 38.) defc = abc, verlängere alsdenn ac nach h, so daß ch der gegebenen Seite gleich werde, ziehe alsdenn durch h die gerade Linie hg mit cf parallel, bis sie die verlängerte Linie ef in g trift. Nun ziehe man ferner gc, welche die verlängerte ed in l trift. Weiter ziehe man durch den Punkt l die Linie li mit dh parallel, so wird das Parallellogramm kchi so groß als das Dreyeck abc seyn.

Beweis.

Es ist lge = gli, fcg = gch, folglich lge — fcg = gli — gch oder lcfe = chil. Ferner ist dcl = clk, also, auch lcfe — dcl = chil — clk oder edcf = ckih = abc.

§. 113.

Zusatz.

Weil jede geradlinichte Figur durch Hülfe der Diagonallinien in Dreyecke getheilet werden kann,

so kann man jedes Dreyeck in ein Parallellogramm verwandeln; da sich alsdenn alle diese Parallellogrammen so verzeichnen laßen, daß sie einerley Höhen haben, und die Summen aller dieser Parallellogrammen machen ein einziges Parallellogramm aus, welches demnach so groß, als die gegebene geradlinichte Figur ist.

§. 114.

Lehrsatz.

Wenn man auf den dreyen Seiten (fig. 39.) des rechtwinklichten Dreyecks abc Quadrate verzeichnet, so ist das Quadrat der Hypothenuse so groß als die Quadrate der Perpendikulärseiten zusammengenommen.

Beweis.

Aus der Spitze des rechten Winkels b ziehe man die Linie bd auf ac senkrecht, und verlängere sie, bis sie die Seite gf des Quadrats der Hypothenuse in e schneide, so wird dadurch das Quadrat der Hypothenuse in zwey Rechtecke getheilt. Ferner ziehe man nach al und bf gerade Linien, so hat man ac = cf, bc = cl, x = y und x + o = y + o, mithin das Dreyeck acl = bfc. Nun nehme man cf als die Grnndlinie des Dreyecks bcf und des Rechteckes defc an, so ist die Höhe beyder des Dreyeckes und des Rechteckes cd = ef, also haben das Rechteck und das Dreyeck gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, folglich muß $\frac{1}{2}$ dcfe = bcf seyn (§. 109.). Ferner nehme man in dem Dreyecke alc und in dem Quadrate bklc die Linie lc zur Grundlinie an, so haben wiederum beyde gleiche Grundlinie und gleiche Höhen cb = kl, folglich

lich $\frac{1}{2}$ bklc = acl. Nun war alc = bfc = $\frac{1}{2}$ dcfe, also muß auch $\frac{1}{2}$ dcfe = $\frac{1}{2}$ bklc, und daher dcfe = bklc seyn. Völlig eben so wird erwiesen, daß adeg = abih.

§. 115.

Zusatz.

Man kann die Quadrate der Seitenlinien des rechtwinklichte Dreyecks kürz so bezeichnen ac^q = bc^q + ab^q. Hieraus ergiebt sich nun ac^q — ab^q = bc^q und ac^q — bc^q = ab^q, demnach auch $\sqrt{(ac^q - ba^q)}$ = bc und $\sqrt{(ac^q - bc^q)}$ = ab.

§. 116.

Zusatz.

Weis man, daß ac^q = ab^q + bc^q (fig. 40.) so ist abc ein rechter Winkel. Man setze nemlich auf bc die Linie bd senkrecht, und mache bd = ab, ziehe alsdenn dc, so hat man dc^q = db^q + bc^q = ab^q + bc^q = ac^q, mithin auch ac = cd und eben darum cba ein rechter Winkel.

§. 117.

Aufgabe.

Es sind die Seitenlinien zweyer Quadrate gegeben, man soll die Seite eines Quadrats finden, welches so groß als die Summe oder die Differenz beyder Quadrate ist.

Auflösung.

Man zeichne einen rechten Winkel abc (fig. 41.), und mache ab = ed = der Seitenlinie des gegebenen

Quadrats, und bc = lh = der Seitenlinie des andern Quadrats, ziehe alsdenn ac, so ist $ac^q = bc^q + ab^q = edgf + lhik$. Ferner mache man mn = lh, und beschreibe mit dem Halbmeßer de aus dem Punkte n einen Kreisbogen, welcher den andern Schenkel mo des rechten Winkels nmo in dem Punkte o schneidet, so wird mo die verlangte Seite seyn. Es ist nemlich $no^q = mo^q + mn^q$, also $no^q - mn^q = mo^q$ oder $defg - lhik = mo^q$.

Viertes Kapitel.

Von dem Kreise und den regulären Figuren.

§. 118.

Lehrsatz.

Wenn der ganze oder halbe Durchmeßer (fig. 10.) eines Kreises den Winkel ecd am Mittelpunkte oder den Bogen ebd des Kreisausschnittes cebd halbiret, so halbiret er zugleich die Sehne ed und steht auf derselben senkrecht.

Beweis.

Weil ecb = bcd, ec = cd und cf = cf, so ist das Dreyeck ecf = fdc, und cf auf ed senkrecht. Eben dies hat auch statt, wenn eb = bd ist.

§. 119.

Zusatz.

Ein Halbmeßer oder Durchmeßer, welcher die Sehne ed senkrecht schneidet, theilt dieselbe, den Bogen ebd und den Winkel am Mittelpunkte ecd in zwey gleiche Theile.

§. 120.

§. 120.

Zusatz.

Ein Halbmeßer oder Durchmeßer, welcher die Sehne ed halbiret, steht zugleich auf derselben senkrecht, und umgekehrt eine gerade Linie, welche die Sehne eines Bogens senkrecht schneidet, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 121.

Aufgabe.

Durch drey gegebene Punkte (fig. 42.) a, b und c, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung.

Man ziehe die geraden Linien ab und bc, welche gewiß Sehnen des verlangten Kreises seyn müßen. Nun halbire man diese Sehnen senkrecht, so müßen die Theilungslinien durch den Mittelpunkt des Kreises gehen und sich folglich daselbst schneiden (§. 120.). Zieht man nun ad, db und dc, so erhellet, daß da = db = dc seyn müßen; Ein Kreis also aus d mit dem Halbmeßer da beschrieben, geht durch die Punkte a, b und c.

§. 122.

Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen (fig. 10.) ebd in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe die Sehne ed, theile sie rechtwinklicht in zwey gleiche Theile, so wird die Theilungsli-

nie ba auch den Bogen ebd in zwey gleiche Theile theilen.

Beweis.

Man ziehe ec und cd, so wird der Winkel ecd durch ba halbiret (§. 118.), folglich ist auch eb = bd.

§. 123.

Lehrsatz.

In einerley Kreise oder auch in verschiedenen Kreisen von gleichen Halbmeßern gehören zu gleich großen Bogen auch gleich große Sehnen, und umgekehrt zu gleich großen Sehnen auch gleich große Bogen.

Beweis.

Wenn die Bogen (fig. 10.) ebd und ahg gleich groß, und die Linien ac, gc, dc und ec die an ihren Endpunkten laufenden Halbmeßer sind, so ist der Winkel acg = ecd, und daher auch ag = ed. Wenn umgekehrt ag = ed, so ist auch der Winkel acg = ecd, und daher der Bogen ahg = ebd.

§. 124.

Aufgabe.

Einen Quadranten in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man setze auf die Mitte der Halbmeßer (fig. 43.) ca und cb die senkrechten Linien fe und gd, diese werden den Quadranten in drey gleiche Theile theilen.

Beweis.

Beweis.

Man ziehe ea, ec, dc und bd, so haben beyde Dreyecke fec und dgc ausser den rechten Winkeln bey f und g, dc = ec und fc = cg, mithin sind beyde Dreyecke fec und dcg gleich. Ausserdem ist aber auch das Dreyeck fec = aef und dcg = dgb, folglich auch das Dreyeck aec = cdb, und daher bce + ecd = ecd + dca oder bce = dca, demnach eb = da. Weiter hat man efc + acd + dce + ecb = 2 R; aber auch im Dreyeck fec ist efc + fec + acd + dce = 2R, folglich efc + acd + dce + ecb = efc + fec + acd + dce, und ecb = fec; aber fec = $\frac{1}{2}$ aec, aec = dcb, also auch ecb = $\frac{1}{2}$ dcb, oder ecb = dce, und daher de = eb = ad.

§. 125.

Lehrsatz.

Sehnen in Kreisen von gleichen Halbmaßern sind gleich groß, wenn sie vom Mittelpunkte gleich weit entfernet sind; sie sind aber ungleich groß, wenn sie vom Mittelpunkte ungleich weit entfernet sind; diejenige, die dem Mittelpunkte näher liegt, ist größer, als diejenige, welche vom Mittelpunkte weiter entfernt ist.

Beweis.

Sind die Entfernungen cf und ci der Sehnen ed und ag (fig. 10.) vom Mittelpunkte gleich groß, also auf ed und ag senkrecht, so erhellet, daß ef = $\frac{1}{2}$ ed und ai = $\frac{1}{2}$ ag. Nun ziehe man ce und ca, so hat man ce^q — cf^q = ef^q und ca^q — ci^q := ai^q. Weil nun ac = ce und cf = ci, also auch

ac^q

$ac^q = ce^q$ und $cf^q = ci^q$, so folgt, daß auch $ef^q = ai^q$ und $ef = ai$ oder $ag = ed$ seyn müße.

Ferner sey $ck < cf$, so hat man doch $ca^q - ck^q = ak^q$, und daher $ca^q - ck^q > ce^q - cf^q$ oder $ak^q > ef^q$ und $ae > ed$.

§. 126.

Lehrsatz.

Wenn die Schenkel eines Winkels im Mittelpunkte mit den Schenkeln eines Winkels in der Peripherie auf gleichen Bogen stehen, so ist der Winkel in der Peripherie halb so groß, als der Winkel im Mittelpunkte.

Beweis.

I. Fall. Wenn der Schenkel ac (fig. 44.) des Winkels acb im Mittelpunkte ein Stück von dem Schenkel ad des Winkels adb in der Peripherie, so hat man $cd = cb$, also auch $cdb = dbc$ (§. 58.). Nun ist aber $acb = cdb + dbc = 2cdb$ (§. 60.), mithin $\frac{1}{2} acb = cdb$.

II. Fall. Wenn der Schenkel ae (fig. 45.) des Winkels acb in der Peripherie den Schenkel cb des Winkels acb im Mittelpunkte schneidet, so ziehe man den Durchmeßer de, und es ergiebt sich $ce = cb$, also $cea + aeb = cbe$ (§. 58.). Nun ist $dca + acb = cea + aeb + cbe = 2ceb + 2aeb$ (§. 60.) und $dca = 2cea$, also $dca + acb - dca = 2cea + 2aeb - 2cea$ oder $acb = 2aeb$, und $\frac{1}{2} acb = aeb$.

III. Fall. Wenn der Schenkel ac des Winkels in dem Mittelpunkte (fig. 46.) weder ein Stück von dem Schenkel des Winkels in der Peripherie, noch

noch der Schenkel ad des Winkels in der Peripherie den einen Schenkel des Winkels im Mittelpunkte schneidet, so ziehe man den Durchmeßer de, und man erhält 2ade = ace und 2edb = ecb, mithin 2adb = acb oder adb = $\frac{1}{2}$ acb.

§. 127.

Erklärung.

Wenn durch die Endpunkte a und b der Schenkel ac und cb (fig. 47.) des Winkels c in der Peripherie die Sehne ab gezogen wird, so heißt alsdann der Winkel c der **Winkel im Abschnitte** acb.

§. 128.

Zusatz.

Die Winkel in einerley Abschnitte sind gleich groß, denn sie sind die Helften von einerley Winkeln im Mittelpunkte.

§. 129.

Zusatz.

Der Winkel abd (fig. 48.) im Halbkreise ist ein rechter Winkel. Denn man ziehe be, so hat man ebd = $\frac{1}{2}$ ecd und eba = $\frac{1}{2}$ eca, mithin ebd + eba = $\frac{1}{2}$ (ecd + eca) = $\frac{1}{2}$ 2R = R.

§. 130.

Zusatz.

Der Winkel in einem Abschnitte, der kleiner als der Halbkreis ist, ist stumpf, und ein Winkel im Abschnitte, der größer als ein Halbkreis, ist ein spitzer Winkel.

§. 131.

§. 131.

Erklärung.

Eine gerade Linie, welche die Peripherie des Kreises also trift, daß kein Punkt von ihr innerhalb der Fläche desselben fällt, heißt eine **Berührungslinie** oder eine **Tangente** des Kreises.

§. 132.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf dem Endpunkte eines Halbmeßers senkrecht steht so ist sie eine Berührungslinie des Kreises.

Auch umgekehrt, wenn eine gerade Linie den Kreis berühret, so ist der Halbmeßer deßelben durch den Berührungspunkt gezogen auf derselben senkrecht.

Beweis.

1. Satz. Alle Punkte der geraden Linie bd (fig. 49.) sind von dem Mittelpunkte c weiter entfernt als der Punkt a, mithin alle Entfernungen derselben von dem Mittelpunkte größer als der Halbmeßer ac, demnach liegen alle Punkte der geraden Linie ausserhalb der Kreisfläche, und der Punkt a muß der Berührungspunkt, also bd eine Tangente seyn.

2. Satz. Die kürzeste Linie welche aus dem Mittelpunkte auf die Berührungslinie gezogen werden kann, muß ca seyn, mithin ist ca die Entfernung des Punkts c von der Linie bd, und folglich senkrecht.

§. 133.

§. 133.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, welcher entweder in der Peripherie oder außer der Preipherie befindlich ist, eine Tangente des Kreises zu ziehen.

Auflösung.

Ist der gegebene Punkt a (fig. 49.), so ziehe man aus dem Mittelpunkte c den Halbmeßer ca, und errichte auf das Ende derselben die senkrechte Linie da, so ist bd die verlangte Tangente.

2. Auflösung.

Ist der gegebene Punkt d (fig. 50.) über der Peripherie, so ziehe man dc, theile sie in a in zwey gleiche Theile, beschreibe darauf mit dem Halbmeßer ad einen Halbkreis dbc, und ziehe durch den gegebenen Punkt d und den Durchschnitspunkt b die verlangte Tangente de.

§. 134.

Zusatz.

Zwey Kreise, die einander berühren, haben auch eine gemeinschaftliche Tangante, und umgekehrt, Kreise, die eine gemeinschaftliche Tangente haben, berühren einander.

§. 135.

Wenn dg die Tangente des Kreises um a (fig. 15.), und man nimmt den Mittelpunkt eines andern Kreises in dem verlängerten Durchmeßer in b, und beschreibet mit dem Halbmeßer be einen Kreis, so

geht

geht deßen Peripherie zwischen der vorigen Peripherie und der Tangente dg durch, demnach wird der Winkel der Tangente mit ihrem Kreise kleiner, als jeder noch so kleine geradlinichte Winkel. Er kann aber nie völlig o werden, weil es sonst nicht zu begreifen wäre, wie er beym Kreise um b kleiner würde als beym Kreise um a.

§. 136.

Erklärung.

Eine Figur heißt in dem Kreise beschrieben, wenn die Peripherie durch alle Winkelpunkte der Figur durchgehet, und eine Figur heißt um den Kreis beschrieben, wenn alle Seitenlinien der Figur den Kreis berühren.

§. 137.

Erklärung.

Eine jede gleichseitige und gleichwinklichte Figur wird regulär genennt. Ein Beyspiel davon giebt schon das gleichseitige Dreyeck und das Quadrat; alle übrige reguläire Figuren, welche mehr als vier Seiten haben, heißen regulaire Polygone oder Vielecke. Es ist daher leicht zu begreifen, was unter einem reguläiren Fünfeck, Sechseck, Siebeneck u. s. zu verstehen ist.

§. 138.

Aufgabe.

Ein reguläires Polygon in dem Kreise zu beschreiben.

Auflösung.

Man theile die Peripherie in so viel gleiche Bogen, als das Polygon Seiten haben soll, ziehe alsdenn die Sehnen durch die Theilungspunkte, so ist geschehen, was verlangt ist.

Beweis.

Sind (fig. 51.) bc, cd, de u. s. die gleichen Bogen, so sind alle ihre Sehnen gleich groß (§. 123.). Ist nun die Zahl der Seitenlinien des reguläiren Polygons, folglich auch die Zahl der gleichen Bogen von der Peripherie = n, so steht alsdenn jeder Winkel, wie dcb in einem Abschnitte, deßen Bogen = $\frac{2P}{n}$ ist, wenn P die Peripherie des Kreises bedeutet, mithin sind auch alle Winkel gleich groß (§. 128.).

§. 139.

Zusatz.

Um ein reguläires Sechseck im Kreise zu beschreiben, hat man nur nöthig mit dem Halbmeßer ah aus dem Punkte a einen Bogen zu beschreiben, welcher den Kreis in b schneidet, und alsdenn die Sehne ab zu ziehen, welche die regulaire Seite eines Sechsecks ist, und die man in der Peripherie herum tragen kann. Es ist also die Seite eines reguläiren Sechseckes dem Halbmeßer des Kreises gleich.

§. 140.

Zusatz.

Der Umfang oder die Peripherie eines jeden auf diese Weise in dem Kreise beschriebenen reguläiren

Polygons, so viele Seiten auch daßelbe haben mag, ist kleiner als die Peripherie des Kreises.

§. 141.

Lehrsatz.

Wenn zwey Tangenten (fig. 52.) ab und ad des Kreises einander in dem Punkte a schneiden, so ist alsdenn ab = ad, auch werden der Bogen deb und der Winkel dcb durch ac in zwey gleiche Theile getheilet.

Beweis.

Es ist bc = cd, und der Winkel cba = cda, und ca = ca, demnach das Dreyeck cba = cda und daher ab = ad, be = ed und acd = bca.

§. 142.

Aufgabe.

Ein reguläires Polygon um den Kreis zu beschreiben.

Auflösung.

Man theile die Peripherie des Kreises in so viele Theile als das regulaire Polygon haben soll, ziehe darauf durch die Theilungspunkte Tangenten, so erhält man das um den Kreis verlangte regulaire Polygon.

Beweis.

Es sind die Winkel (fig. 52.) bey h, b, d, f u. s. gleich groß weil in den Vierecken icg, gca, ace u. s. die Winkel cab, cgb, cad, ced u. s. rechte Winkel, überdem die Winkel icg, gca, ace u. s. gleich groß, ab = bg = gh = hi = ik u. s. und ac = cg = ci

= ci = ce u. s. Ferner ist der Winkel hcg = ½ icg und gcb = ½ gca (§. 141.) und icg = gca, mithin hcg = gcb. Ausserdem sind die Winkel bey g rechte Winkel und gc = gc, also hcg = gcb und gb = gh, daher hb = 2gb. Eben so erhellet, daß bd = 2ba. Nun ist aber ba = bg (§. 141.), mithin auch bd = bh. Aus dem nemlichen Grunde ist klar, daß df = bd = bh u. s. seyn müße.

§. 143.

Zusatz.

Der Umfang oder die Peripherie eines jeden auf diese Weise um den Kreis beschriebenen reguläiren Polygons ist größer als die Peripherie des Kreises, so viele Seiten auch das Polygon haben mag.

§. 144.

Lehrsatz.

In einem jeden regulären Polygone giebt es innerhalb der Fläche deßelben einen Punkt, welcher nicht nur von allen Winkelpunkten, sondern auch von allen Seitenlinien des regulären Polygons gleich weit entfernet ist.

Beweis.

Man theile zwey Polygonwinkel (fig. 51.) a und f in zwey gleiche Theile, so erhält man das gleichschenklichte Dreyeck ahf worinn ha = hf ist. Ferner ziehe man he, so ist haf = hfe, hf = ha und fa = fe, mithin auch eh = fh = ah. Auf eben diese Art erhellet, daß dh = ch = hb = ha sey. Man ziehe ferner hk auf fa und hi auf ef senkrecht, so ist hfk = hfi, fk = fi, und hf = hf mithin hif = hfk

und daher hi = hk. Eben so erhellet, daß die übrigen Seitenlinien von dem Punkte h eben so weit entfernet sind.

§. 145.

Zusatz.

Wenn man also aus den Winkelpunkten des regulären Polygons nach dem Punkte innerhalb der Fläche desselben, von welchem sie alle gleich weit entfernet sind, gerade Linien ziehet, so läßt sich jedes reguläre Polygon in so viele unter sich gleiche Dreckecke theilen, als es Seiten hat.

§. 146.

Zusatz.

Ein Kreis also, welcher mit dem Halbmeßer ha beschrieben wird, muß durch alle Winkelpunkte des regulären Polygons gehen, und einer mit dem Halbmeßer hk beschrieben muß die Seitenlinien des Polygons berühren.

§. 147.

Zusatz.

Eine jede andere gerade Linie, welche man aus dem Punkte h auf die Peripherie des regulären Polygons ziehen kann ist kleiner als ha und größer als hk.

§. 148.

Erklärung.

Bey einem jeden regulairen Polygone laßen sich folgende Stücke unterscheiden: 1. Der Punkt, welcher von allen Winkelpuukten und Seitenlinien des regu-

reguläiren Polygons gleich weit entfernet ist, und welcher der Mittelpunkt des reguläiren Polygons genennet werden kann, 2. die Entfernung der Winkelpunkte von dem Mittelpunkte des reguläiren Polygons oder der grösste Halbmesser; 3. die Entfernung der Seitenlinien von dem Mittelpunkte oder der kleinste Halbmesser; 4. der Winkel im Mittelpunkte zwischen zweyen grösten Halbmessern oder der Centriwinkel, und 5. ein jeder von den gleichen Winkeln des reguläiren Polygons oder der Polygonwinkel.

§. 149.

Aufgabe.

Es sey die reguläire Seite eines Sechseckes gegeben, man soll dasselbe beschreiben.

Auflösung.

Man zeichne (fig. 51.) auf fa ein gleichseitiges Dreyeck, und beschreibe mit dem Halbmesser ha einen Kreis, so kann man fa um die Peripherie desselben sechsmal herumtragen, folglich dadurch ein reguläires Sechseck erhalten (§. 139.).

§. 150.

Aufgabe.

Es sey der Polygonwinkel abd (fig. 54.) nebst der Seite ab gegeben, man soll das reguläire Polygon verzeichnen.

Auflösung.

Man theile den Polygonwinkel abd in zwey gleiche Theile §. 78.) und verzeichne in dem Punkte

a den Winkel bac = ½ abd = abc (§. 84.), darauf beschreibe man mit dem Halbmeßer cb einen Kreis, so kann man ab völlig in der Peripherie herumtragen, und dadurch das verlangte Polygon erhalten.

§. 151.

Lehrsatz.

Ein jedes reguläire Polygon ist so groß als ein Dreyeck, deßen Grundlinie der Peripherie des Polygons, und deßen Höhe dem kleinsten Halbmeßer deßelben gleich ist.

Beweis.

Das reguläire Polygon ist eine Summe von so vielen gleichen Dreyecken, als es Seiten hat, deren Höhen gleich dem kleinsten Halbmeßer (§. 144. 145.), und deren Grundlinien so groß als die Peripherie desselben ist. Die Summe aller dieser Dreyecke aber ist einem Dreyecke gleich, deßen Grundlinie so groß als die Grundlinien der Dreyecke zusammengenommen, und deßen Höhe gleich den Höhen der Dreyecke, folglich auch dieses Dreyeck so groß als das regulaire Polygon (§. 110.).

Fünftes Kapitel.

Von der Anwendung der Rechenkunst auf die bisher vorgetragenen Lehren.

§. 152.

Erklärung.

Wenn es verlangt wird, daß man die Größe einer Ausdehnung durch eine Zahl ausdrücken soll, so

so kommt es hierbey vorzüglich darauf an, daß man eine Größe als bekannt voraussetzet, und alsdenn untersuchet, wie vielmal dieselbe in derjenigen enthalten sey, deren Größe bestimmt angegeben werden soll. Die bekannte Größe heißt das Maas, die zu bestimmende Größe die auszumeßende Größe, und das Verfahren selbst, wodurch die auszumessende Größe bestimmt wird, Meßen. Das Maas muß mit der auszumeßenden Größe allemal von einerley Art seyn, ob es gleich willkührlich, das Maas so groß anzunehmen als man will.

§. 253.

Zusatz.

Das Maas einer geraden Linie ist eine gerade Linie, so wie das Maas eines Winkels ein Winkel seyn muß.

§. 154.

Willkührlicher Satz.

Es ist durchgängig eingeführt, ohngefehr die Länge eines Fußes eines erwachsenen Menschen zur Ausmeßung gerader Linien zu gebrauchen, daher man auch dieses Maas einen Fuß nennt. Zehn solche Füße nennt man eine Ruthe, den zehnten Theil eines Fußes einen Zoll, den zehnten eines Zolles eine Linie, und den zehnten Theil einer Linie einen Scrupel u. s. Dieses so genannte Decimalmaas ist bey den Geometern gewöhnlich, weil hierdurch die kleinern Theile des Maasses sehr bequem durch Decimalbrüche ausgedrucket werden können. Sonst ist es im gemeinen Leben mehr gewöhlich, einen Fuß in 12. Zoll 1 Zoll in 12 Linien, 1 Linie in 12 Scrupe-

pel u. s. einzutheilen. Alsdenn rechnet man 12, auch 15 und 16 Fuß auf eine Ruthe, 6 Fuß auf eine Toise, Klafter, Faden, Lachter u. s. Dieses Maas wird das Duodecimalmaas genennt. Zur Bezeichnung der Ruthen, Füße, Linien, Scrupel u. s. bedienet man sich folgender Zeichen $^{\circ}, ^{1}, ^{11}, ^{111}, ^{1111}$ u. s.

§. 155.

Zusatz.

Das Decimalmaas auf Duodecimalmaas und umgekehrt das Duodecimalmaas auf Decimalmaas zu bringen lehrt die Regel Detri. Wenn vorausgesetzet wird, daß 0^{1} Decimalm. $= 12^{1}$ Duodecimalmaas, und man wollte wißen, wie viel betragen 20^{1} Decimal. nach Duodecim. so setzt man folgender Maassen an

$$10 : 120 = 12 :$$

$$\frac{12}{240}$$

$$\frac{12}{1440}$$

$$1 \quad 0$$

144^{1} Duodeci. $= 120^{1}$ Decim.

Weil aber die Fuße an verschiedenen Orten gar sehr verschieden sind, so ist allemal vorauszusetzen, daß der Reduktionssatz bekannt sey. Demnach müßen Vergleichungstafeln angegeben seyn, woraus man den Reduktionssatz finden kann. In Deutschland hat man vorzüglich den sogenannten Rheinländischen Fuß zu kennen nöthig, und in physischen und mathematischen Rechnungen kommt der Pariser Fuß häuffig vor. Man hat den Pariser Fuß in 12 Zolle, 1 Zoll

in

in 12 Linien, und 1 Linie in 10 points eingetheilt, so daß 1 Pariser Fuß 1440 points enthält; die Länge des Rheinländischen Fußes beträgt alsdenn 1391,3 solcher Pariser points, und der gemeine Londner 1351, mithin hat man

1 Paris. Fuß : 1 Rhl. Fuß = 1440 : 1391,3 also
1391,3 Paris. Fuß = 1440 Rheinl. Fuß,

und das ist der Reduktionsatz.

§. 156.

Zusatz.

Bey Meßung gerader Linien auf dem Pappiere bedient man sich des genugsam bekannten Zirkelinstruments, und es hat gar keine Schwierigkeit, eine gerade Linie auf dem Pappiere mittelst eines Zirkels zu meßen, wenn der sogenannte Maasstab gegeben oder willkührlich angenommen worden. Aus diesem Grunde pflegt man eine kleine Linie für eine Ruthe anzunehmen, und sie in Fuße, Zolle, Linien u. s. einzutheilen, so wie es im großen gewöhnlich ist, und bey jeder Zeichnung den auf diese Weise verkleinerten Maasstab unter den Nahmen eines verjüngten Maasstabes beyzufügen. Bey wirklichen Ausmeßungen im großen aber zeigen sich mehrere Schwierigkeiten, welche hier nicht angegeben werden können. Zum praktischen Gebrauch der Geometrie bedient man sich der sogenannten Meßschnuren, Meßketten, Meßdrahte, Meßstäbe und d. g.

§. 157.

Willkührlicher Satz.

Man kann den rechten Winkel zum Maas aller übrigen Winkel gebrauchen, und es ist jedermann

begreiflich, wie groß ein Winkel sey, wenn er weiß, daß er $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{12}{17}$ u. s. von einem rechten Winkel ausmache. Hieraus sieht man aber deutlich, daß es bloß darauf ankomme, den rechten Winkel in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen. Allein in der Elementargeometrie giebt es noch keine Regeln, nach welchen man dieses verrichten könnte. Man muß sich demnach begnügen, die Theilung durch Versuche vorzunehmen. Um aber einen rechten Winkel wirklich in gleiche Theile zu theilen, hat man nur nöthig mit jedem willkührlich gewählten Halbmeßer zwischen den Schenkeln des rechten Winkels cab (fig. 55.) den Quadranten cmb zu beschreiben, und denselben in so viele gleiche Theile zu theilen, als der rechte Winkel haben soll. Denn die Theilungslinien des Quadranten nach der Spitze a des rechten Winkels gezogen theilen denselben in eben so viel gleiche Theile. Zum beßern Gebrauch theile man nun diesen Quadranten in 90 gleiche Theile und nenne $\frac{1}{90}$ von dem Quadranten einen **Grad**. Eben so heißt alsdenn auch der 90te Theil eines rechten Winkels ein Grad. Demnach faßt die halbe Peripherie 180 und die ganze 360 Grade. Abermals theile man einen Grad in 60 Theile, und nenne einen solchen Theil eine **Minute**, den 60ten Theil einer Minute eine **Sekunde** den 60ten Theil einer Sekunde eine **Terrie** u. s. Es faßet demnach ein jeder anderer Winkel er sey spitz oder stumpf so viele Grade und Theile davon vom rechten Winkel, als der Bogen zwischen seinen Schenkeln Grade oder Theile von Graden des Quadranten oder Peripheri e enthält. Weiß man z. E. daß ein Winkel 36 Grade habe, so bedeutet

deutet dies so viel, als er betrage $\frac{36}{90}$ von dem rechten Winkel. Um nun einen Winkel in diesem Sinne zu messen, dienet ein Halbkreis, welcher in seine 180 Grade ist getheilet worden, und unter den Namen eines **Winkelmessers** oder **Transporteurs** hinlänglich bekannt ist. Zur Bezeichnung der Grade, Minuten, Secunden, Tertien u. s. gebrauchet man eben die Zeichen, womit Ruthen, Fuße, Zolle, Scrupel u. s. angedeutet werden.

§. 158.

Aufgabe.

Einen geradlinichten Winkel vermittelst des Tranporteurs auf dem Pappiere zu messen.

Auflösung.

Man lege den Transporteur auf des Winkels Spitze (fig. 3.), daß sein Mittelpunkt auf diese fällt, und die Schärfe des Lineals genau an dem einen Schenkel ab anliegt. Nun kann man die Grade abzählen, welche der andere Schenkel ac auf dem Transporteure abschneidet, und so viele Grade faßet auch der Winkel.

§. 159.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel cab (fig. 3.) an eine gegebene Linie ac (fig. 4.) zu setzen.

Auflösung.

Man lege den Transporteur mit dem Mittelpunkte auf den Punkt a, so daß die gegebene Linie ac genau an dem Lineale des Transporteurs anlie-

get, alsdenn zähle man von c an auf dem Bogen des Transporteurs so viele Grade ab, als der gegebene Winkel hat, und bezeichne es vorläufig mit einem Punkte. Darauf ziehe man von diesem Punkte nach dem Punkte a eine gerade Linie, so wird der daher entstandene Winkel dem gegebenen gleich seyn.

§. 160.

Aufgabe.

Die Peripherie des Kreises in eine verlangte Anzahl gleicher Theile mittelst des Transporteurs zu theilen.

Auflösung.

Man dividire die gegebene Anzahl der gleichen Theile in 360°, so giebt der Quotient die Anzahl der Grade an, welche ein jeder Theil der Peripherie haben soll. Nun nehme man einen willkührlichen Punkt a an (fig. 9.), wenn er noch nicht bestimmt ist, und ziehe den Halbmeßer ac, setze darauf in c einen Winkel, welcher so groß ist, als vorher gefunden worden, so wird agb ein solcher verlangter Theil seyn.

§. 161.

Lehrsatz.

In einem gleichseitigen Dreyecke beträgt jeder Winkel 60 Grade.

Beweis.

In einem jeden, also auch in einem gleichseitigen Dreyecke ist die Summe aller Winkel = 2R = 2. 90° = 180°. Weil nun alle Winkel in einem gleichsei-

tigen

tigen Dreyeck gleich groß, so muß jeder Winkel $\frac{2}{3}$ R = $\frac{180°}{3}$ = 60° seyn.

§. 162.

Zusatz.

Wenn also in einem Dreyecke ein jeder Winkel 60° beträgt, so muß es auch gleichseitig seyn.

§. 163.

Zusatz.

Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke acb (fig. 19) ein Winkel gegeben worden, so sind sie alle gegeben. Es sey ac = cb, und c gegeben, so hat man a + b = 2R — c, mithin a = b = R — $\frac{1}{2}$ c. Ist aber a = b gegeben, so ist c = 2R — a — b = 2R — 2a. Es sey c = 70°, so ist a = b = 90° — $\frac{1}{2}$ 70 = 90 — 35 = 55°.

§. 164.

Zusatz.

Wenn in einem ungleichseitigen Dreyecke die Größe eines Winkels in Graden ist gegeben worden, so findet man die Summe der beyden übrigen Winkel in Graden, wenn man den gegebenen Winkel von 180° subtrahiret. Sind aber zwey Winkel in Graden gegeben, so findet man den dritten, wenn man jene beyden addiret, und diese Summe von 180° subtrahiret.

§. 165.

Um Winkel auf dem Felde zu meßen, dienen auch schon die Meßstäbe und Meßketten, welches sich deutlicher zeigen, als beschreiben läßt.

§. 166.

§. 166.
Aufgabe.

Die Weite zweyer Oerter zu meßen, nach welchen man aus einem angenommenen Standpunkte kommen kann.

Auflösung.

Man meße aus dem Standpunkte c (fig. 56.) die Längen ac und cb, und trage diese Längen rückwärts auf die verlängerten Linien in e und d, und ziehe de, diese wird = ab seyn.

§. 167.
Aufgabe.

Die Weite zweyer Oerter zu meßen, zu deren einen man aus einem angenommenen Standpunkte kommen kann.

Auflösung.

Man meße aus dem Standpunkte g (fig. 57.) die Linien gc und gb, und trage sie rückwärts auf die verlängerte Linien in d und c. Darauf gehe man in der geraden Linie dc fort und suche den Punkt f, der auch mit g und a in gerader Linie liegt so wird ef = ab seyn.

§. 168.
Aufgabe.

Die Weite zweyer Oerter zu meßen, zu deren keinen man kommen kann.

Auflösung.

Man wähle den Standpunkt c (fig. 58.), mache cd = ce, stecke in d und g in den geraden Linien ad und be Stäbe. Darauf meße man cg und ch, und trage

trage diese Längen rückwärts auf die verlängerten Linien nach f und i. In den verlängerten Linien df und ei suche man die Punkte k und l, so daß jener mit c und b und dieser mit c und a in gerader Linie liege, so wird kl = ab seyn.

§. 169.

Aufgabe.

Den Polygonwinkel eines reguläiren Vielecks in Graden und Theilen davon zu finden.

Auflösung.

Man dividire die Anzahl der gegebenen Seiten in 360°, und subtrahire diesen Quotienten von 180°, diese Differenz ist der Polygonwinkel des reguläiren Vielecks.

Beweis.

Ein jedes reguläire Polygon läßt sich in so viele gleiche Dreyecke theilen, als es Seiten hat. Dividiret man nun die Anzahl der Seiten in 360°, so erhält man den Centriwinkel. Der Centriwinkel aber und der Polygonwinkel machen zusammen 180°, mithin erhält man auch den Polygonwinkel, wenn man den Centriwinkel von 180° subtrahiret. Setzt man also die Anzahl der Seitenlienien des reguläiren Polygons = n, und den Polygonwinkel = y,

so hat man $y = 180° - \frac{360}{n}$.

§. 170.

Zusatz.

Hieraus läßt sich eine Tafel für die Centri- und Polygonwinkel berechnen, welche in der Ausübung von großem Nutzen ist. Es wird

für

für das	der Centriwinkel	der Polygonwink.
Fünfeck — —	72° — —	108° — —
Sechseck —	60° — —	120° — —
Siebeneck —	51° 25′ 42 6″/7	128° 34′ 17 1″/7
Achteck — —	45° — —	135° — —
Neuneck —	40° — —	140° — —
Zehneck — —	36° — —	144° — —

§. 171.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ab (fig. 54.) ein reguläires Polygon zu beschreiben.

Auflösung.

Man suche den Polygonwinkel, und setze mittelst des Transporteurs an a und b die Helfte desselben, so werden sich die Schenkel ac und bc in dem Mittelpunkte c schneiden. Mit dem Halbmeßer ac beschreibe man alsdenn einen Kreis, so kann man ab in der Peripherie herumtragen, und die Sehnen zusammenziehen.

Sechstes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Figuren und von der Vergleichung der Flächen geradlinichter Figuren.

§. 172.

Erklärung.

Wenn in dem Dreyecke (fig. 59.) abc die Linie de mit der Grundlinie ac parallel gezogen wird,

so

so heißen die Seitenlinien ab und db, be und bc, de und ac gleichnahmigte Seitenlinien, und die Winkel, welche gleichnahmigte Seitenlinien einschliessen, gleichnahmigte Winkel. Solche Figuren, welche gleichnahmigte Seitenlinien und gleichnahmigte Winkel haben, heißen ähnliche Figuren. Wenn also zwey Figuren einander ähnlich seyn sollen, so müßen bey gleicher Anzahl der Seitenlinien die Winkel, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, gleich groß, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, einander proportional seyn. Um anzuzeigen, daß Figuren einander ähnlich sind, gebrauchet man das Zeichen (∾).

§. 173.

Zusatz.

Figuren, die auf und in einander paßen, sind nicht nur gleiche, sondern auch ähnliche Figuren, und wenn zwey Figuren einer dritten ähnlich sind, so sind sie unter sich ähnlich.

§. 174.

Zusatz.

Zwey reguläre Polygone, welche eine gleiche Anzahl von Seitenlinien haben, sind ähnlich, weil nicht nur die Polygonwinkel in beyden, sondern auch die Seitenlinien in jedem Polygone für sich gleich groß, mithin die Seitenlinien des einen Polygons mit den Seitenlinien des andern proportional sind.

§. 175.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreyecke (fig. 60) die eine Seitenlinie ab in eine beliebige Anzahl gleicher Theile

getheilet, und alsdenn durch alle Theilungspunkte mit ac parallelle Linien gezogen werden, so wird dadurch die dritte Seite bc in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilet.

Beweis.

Man ziehe ek, gl und im mit ab parallel, so ist der Winkel dbe = keg, bde = ekg und ek = df = db, mithin auch be = eg. Ferner ist auch der Winkel lgi = keg, gli = ekg und lg = hf = fd = ke, folglich gi = ge = eb. Auf die nemliche Art wird erwiesen, daß ic = ig = eg = eb sey.

§. 176.

Zusatz.

Um eine gegebene gerade Linie bc (fig. 60.) in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, kann man an das Ende derselben b eine Linie ba unter einen beliebigen Winkel ansetzen, auf derselben von dem Punkte b so viel gleiche Theile tragen, als bc haben soll, den letzten Theilungspunkt a mit c zusammenziehen, und aus allen Theilungspunkten mit ac Parallelinien zeichnen.

§. 177.

Lehrsatz.

Wenn in dem Dreyecke (fig. 59.) abc eine Linie de mit der Grundlinie ac parallel gezogen wird, daß sie die beyden Seitenlinien ab und cb in den Punkten d und e schneidet, so ist alsdenn ab : bd = bc : be.

Auch

Auch umgekehrt, wenn ab : bd = bc : be, so muß de mit der Grundlinie ac parallel laufen.

Beweis.

Wan theile ab in gleiche beliebige Theile und ziehe durch die Theilungspunkte parallelle Linien mit ac, so wird ein solcher Theil von ab in ab eben so vielmal enthalten seyn, als ein Theil von bc in bc enthalten ist: aber auch bd wird einen Theil von ab eben so vielmal enthalten als be einen Theil von bc enthält d. h. es ist ab : bd = bc : be.

Es sey ferner ab : bd = bc : be, und es laufe de mit ac nicht parallel, so muß man doch wenigstens durch den Punkt d eine Linie df ziehen können, welche mit ac parallel seyn müßte, alsdenn hätte man ab : bd = bc : bf. Weil nun ab : bd = bc : be seyn soll, so muß auch bc : bf = bc : be oder bc : bc = bf : be seyn, demnach bf = be, weil bc = bc, welches nicht anders seyn kann, als wenn df mit de zusammenfällt.

§. 178.

Zusatz.

Gesetzt es wäre an der Spitze b des Dreyecks abc (fig. 61.) ein anderes Dreyeck bde also verzeichnet, daß de mit ac parallel gehet, so muß auch in diesem Falle ab : be = bc : bd seyn. Man nehme nemlich bf = be, und ziehe fg mit ac parallel, so ist auch de mit fg parallel. Nun aber hat man ab : fb = cb : gb, und, da dbe = fbg, bf = be, und gb = bd, ab : be = cb : bd.

§. 179.

Zusatz.

Aus der Proportion (§. 177.) ab : bd = cb : be folgt auch ab — bd : bd = bc — be : be oder ad : bd = ec : eb d. h. auch die durch die Linie de abgeschnittenen Theile sind einander proportional.

§. 180.

Zusatz.

Wenn zwey Linien (fig. 62.) fe und hg zwischen zweyen parallellen Linien ab und cd von einer dritten mit ab und cd parallellen Linie ik geschnitten werden, so muß fe : ie = gh : hk seyn. Man ziehe nemlich eg, so hat man fe : ie = ge : le, und

hg : hk = ge : le, mithin auch

fe : ie = hg : hk

Auch umgekehrt, wenn fe : ie = hg : hk, so muß ik mit ab und cd parellel seyn, Gesetzt es liefe ik mit ab nicht parallel, so muß man doch durch i eine mit ab und cd parallelle Linien ziehen können, diese sey im, so hat man fe : ie = gh : mh. Da nun

fe : ie = gh : hk seyn soll, so ist auch

gh : mh = gh : hk, folglich mh = hk, weil gh = gh ist, und eben darum muß ik mit ab parallel seyn.

§. 181.

Lehrsatz.

Dreyecke, welche gleiche Winkel haben, sind einander ähnlich.

Beweis.

Beweis.

In beyden Dreyecken (fig. 63.) abc und def sey a = d, b = e und c = f. Man nehme nun ag = de, und ziehe durch g die Linie gh mit bc parallel, so ist der Winkel agh = b = e, ahg = c = f, also auch das Dreyeck agh = def. Nun hat man ab : ag = ac : ah, folglich auch ab : de = ac : df. Ferner ziehe man hi mit ab parallel, so ist bi = gh, und es ist ab : ag = bc : bi oder ab : ag = bc : gh, mithin ab : de = bc : ef. Endlich folgt aus beyden Proportionen ab : de = ac : df und ab : de = bc : ef die dritte ac : df = bc : ef. Hieraus ergiebt sich, daß beyde Dreyecke ∽ sind (§. 172.).

§. 182.

Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken die gleichnahmigten Seitenlinien einander proportional sind, so sind sie ähnlich.

Beweis.

Es sey ab : bc = ed : ef und ab : ac = de : df, also auch bc : ac = ef : df, Man nehme nun ag = de, und ziehe aus dem Punkte g die Linie gh mit bc parallel, so ist das Dreyeck abc ∽ agh, und man hat ab : bc = ag : gh; bc : ac = gh : ah. Demnach erhält man auch ed : ef = ag : gh und ed : df = gh : ah, folglich ist gh = ef, weil ed = ag, und daher ferner df = ah, also ist das Dreyeck agh = def, und eben deswegen abc ∽ def.

§. 183.

Lehrsatz.

Wenn in den Dreyecken abc und def der Winkel a = d, und die Seiten, welche diesen gleichen Winkel einschließen, einander proportional sind, so sind beyde Dreyecke ähnlich.

Beweis.

Man nehme auf ab das Stück ag = de, und auf ac das Stück ah = df und ziehe gh, so ist das Dreyeck agh = def. Nach der Voraussetzung ist nun ab : ac = de : df, also auch ab : ac = ag : gh, und daher, gh mit bc parallel, folglich das Dreyeck ahg ∾ abc, und aus eben dem Grunde def ∾ abc.

§. 184.

Lehrsatz.

Wenn in den Dreyecken abc und def der Winkel a = d, und die Seitenlinien ab und de, bc und ef, welche den gleichen Winkel nicht einschließen, einander proportional sind, überdem auch die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite bc > ab, also auch ef > de, so sind beyde Dreyecke einander ähnlich.

Beweis.

Man mache ag = de, und verzeichne in g den Winkel agh = b, so ist auch ahg = c, und das Dreyeck acb ∾ agh demnach ab : bc = ag : gh und bc : ca = gh : ah. Nach der Voraussetzung soll aber ab : bc = de : ef seyn, also auch ag : gh = de : ef.

Da

Da nun ag = de, so ist auch gh = ef und daher das Dreyeck agh = def, folglich auch def ∾ abc

§. 185.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen geraden Linien a, b, c die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

Man verzeichne einen Winkel (fig. 64.) fag von beliebiger Größe, mache alsdenn ae = a, ag = b und af = c; darauf ziehe man eg, und aus dem Punkte f mit eg die parallelle Linie fh, so ist ah die verlangte Proportionallinie. Denn es ist ae : af = ag : ah oder a : c = b : ah.

§. 186.

Zusatz.

Ist die gegebene Linie c = b, so findet man auf eben die Art zu zwey gegebenen Linien a und b die dritte Proportionallinie.

§. 187.

Aufgabe.

Zu zwey gegebenen Linien (fig. 65.) a und b die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

Man setze beyde Linien zusammen, halbire sie, und beschreibe mit der Helfte fc einen Halbkreis, errichte alsdenn aus dem Punkte g die senkrechte Linie ge, welche den Halbkreis in e schneidet; diese wird die verlangte mittlere Proportionallinie seyn.

Beweis.

Man ziehe fe und ed, so ist fed = R (§. 129.) oder feg + ged = ged + gde und daher feg = gde, demnach auch efg = ged, und beyde Dreyecke feg und ged sind einander ähnlich, und man hat fg : ge = ge : gd.

§. 188.

Zusatz.

Wenn von dem rechten Winkel fed die Linie eg senkrecht auf die Hypothenuse fd herabgelaßen wird so theilt sie das ganze Dreyeck in zwey ähnliche Dreyecke, die auch dem ganzen ähnlich sind.

§. 189.

Zusatz.

Wenn in dem Halbkreise fed der rechte Winkel e verzeichnet worden, und man läßt von der Spitze des rechten Winkels die senkrechte Linie eg auf den Durchmeßer fd herab, so ist eine jede Sehne wie fe oder ed die mittlere Proportionallinie zwischen den Durchmeßer fd und dem anliegenden Theile deßelben fg oder gd.

§. 190.

Erklärung.

Wenn in zweyen ähnlichen Figuren nach den gleichnahmigten Winkeln Diagonalen gezogen werden, so nennt man sie **gleichnahmigte Diagonallinien.**

§. 191.

Lehrsatz.

Aehnliche Figuren werden durch gleichnahmigte Diagonallinien in ähnliche Dreyecke getheilt.

Beweis.

Beweis

Daß das Dreyeck (fig. 66.) abc ∾ fgh, folgt daher, weil b = f und ab : bc = hf : fg, folglich ist auch der Winkel bac = fhg. Weil ferner der Winkel bae = fhi, so hat man auch bae — bac = fhi — fhg oder cae = ghi. Ausserdem ist ae : ac = hi : hg, also auch das Dreyeck cae ∾ hig. Auf gleiche Art wird erwiesen, daß auch ecd ∾ igk.

§. 192.

Lehrsatz.

In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge zu einander, wie jedes Paar gleichnahmigter Seiten- oder Diagonallinien.

Beweis.

Es ist ab : hf = ab : hf = ac : hg
ae : hi = ab : hf = ac : hg
ed : ik = ab : hf = ac : hg
dc : kg = ab : hf = ac : hg
cb : gf = ab : hf = ac : hg

also auch

ab + ae + ed + dc + cb : hf + hi + ik + kg + gf = ab : hf = ac : hg.

§. 193.

Zusatz.

Wenn in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone verzeichnet worden, so ist alsdenn das Dreyeck (fig. 67.) abc ∾ fgc, so wie acd ∾ fch; demnach hat man ab : fg = ac : fc = dc : hc,

und hieraus folgt, daß sich die Peripherien ähnlicher reguläirer Polygone zu einander verhalten, wie die größten oder kleinsten Halbmeßer derselben. Setzt man also P die Peripherie das äussern und p die Peripherie des innern ähnlichen Polygons, so ergiebt sich $P : p = ac : fc = dc : hc$, mithin $\frac{P}{p} = \frac{ac}{fc} = \frac{dc}{hc}$ d. h. der Exponent des Verhältnißes der Peripherie des äussern zur Peripherie des in dem Kreise beschriebenen ähnlichen reguläiren Polygons wird gefunden, wenn man den größten Halbmeßer von einem der ähnlichen Polygone durch seinen kleinsten dividiret.

§. 194.

Aufgabe.

Man soll in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläire Polygone von so vielen Seiten verzeichnen, daß der Exponent des Verhältnißes der Peripherie des äußern gegen die Peripherie des innern kleiner wird, als eine gegebene Zahl, welche um etwas sehr weniges größer als 1 ist

Auflösung.

Es sey n eine sehr große Zahl, so ist alsdenn $1 + \frac{1}{n}$ um etwas sehr weniges größer als 1. Man theile den Halbmeßer (fig. 68) ac in n gleiche Theile, und nehme $ab = \frac{1}{n} ac$, so ist alsdenn $cb = ac + ab = ac + \frac{1}{n} ac$, mithin $\frac{cb}{ac} = \frac{ac + \frac{1}{n} ac}{ac} = 1 + \frac{1}{n}$.

Nun ziehe man durch b die Tangente bi, so erhält man

man dadurch den Kreisbogen ad von bestimmter Größe. Darauf untersuche man, wie vielmal dieser Bogen sich in der halben Peripherie herumtragen laße; gesetzt man fände entweder m mal oder nicht völlig (m + 1) mal, so kann man nunmehr eine Zahl μ annehmen, welche entweder $=$ m + 1 oder noch größer ist, und die halbe Peripherie in μ gleiche Theile theilen. Ein solcher Theil sey df oder df $= \frac{1}{\mu}$. $\frac{1}{2}\pi$, wenn π die Peripherie des Kreises bedeutet, und fdh $= \frac{1}{\mu}\pi$, so ist fh die Seite des innern, und, wenn cg und ci gezogen wird, gi die Seite des äussern ähnlichen regulären Polygons.

Beweis.

Es sey P die Peripherie des äussern und p die Peripherie des innern Polygons, so hat man $\frac{P}{p} = \frac{cg}{cf}$ (§. 193.). Nun ist cg $<$ cb und cf $=$ ca, also auch $\frac{cg}{cf} < \frac{cb}{ca}$; aber $\frac{cb}{ca} = 1 + \frac{1}{n}$ mithin $\frac{cg}{cf} < 1 + \frac{1}{n}$ oder $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{n}$.

§. 195.

Zusatz.

Man kann also ein Paar ähnliche reguläre Polygone in und um den Kreis finden, daß sich das Verhältniß der Peripherie des äussern gegen die

die Peripherie des innern dem Verhältniße 1:1 immer mehr nähert d. h. daß die Peripherie des äussern mit der Peripherie des innern beynahe zusammenfällt. Da nun die Peripherie des Kreises zwischen beyden Peripherien der ähnlichen reguläiren Polygone fallen muß, so wird es begreiflich, daß man die Peripherie eines Kreises als ein reguläires Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten kann. Die Peripherien zweyer ähnlichen reguläiren Polygone verhalten sich aber zu einander wie die größten oder kleinsten Halbmeßer, demnach verhalten sich auch die Peripherien zweyer Kreise zu einander, wie ihre Halbmeßer, oder auch wie ihre Durchmeßer, oder das Verhältniß der Peripherie zum Halb- oder Durchmeßer ist in allen Kreisen einerley.

§. 196.

Lehrsatz.

Die Flächen zweyer Parallellogramme (fig. 69.) abcd und efgh welche gleich hoch sind, verhalten sich zu einander, wie ihre Grundlinien.

Beweis.

Man mache ikcb = fgeh, theile ab in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile und ziehe aus den Theilnngspunkten l, m, u. s. die Linien lo, mp, nq u. s. mit ad parallel, so wird dadurch das Parallellogramm abcd in eben so viel gleiche Parallellogramme wie adol getheilt, als die Linie ab Theile enthält. Aber auch das Parallellogramm ikcb enthält so viele gleiche Parallellogramme wie adol, als ib Theile wie al enthält. Also ist adcb:efgh = ab:eh,

§. 197.

§. 197.

Zusatz.

Auch Dreyecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien. Denn was vom Ganzen gilt, muß auch von deren Helften gelten (§. 103.).

§. 198.

Lehrsatz.

Die Flächen zweyer Parallellogramme abcd und efgh (fig. 70.) verhalten sich zu einander wie ihre verschiedenen Höhen, wenn sie gleiche Grundlinien haben.

Beweis.

Man verwandele beyde Parallellogramme in eben so große Rechtecke blmc und fkhg. Nimmt man nun cm und gh als die Grundlinien beyder Rechtecke an, so haben sie gleiche Höhen ml = hk, mithin ist abcd : efgi = cm : hg.

§. 199.

Zusatz.

Auch Dreyecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen, weil sie die Helften von Parallellogrammen sind.

§. 200.

Lehrsatz.

Das Verhältniß zweyer Parallellogramme also auch zweyer Dreyecke ist zusammengesetzt aus den Verhältnißen der Grundlinien und Höhen.

Beweis.

Beweis.

Man verzeichne das Rechteck (fig. 71.) klmn deßen Grundlinie kn = ad, und deßen Höhe mn = ie, so ergiebt sich

abcd : klmn = cn : nm (§. 193.) und
klmn : gefh = ad : gh (§. 196.) demnach

$$abcd : gefh = \begin{cases} cn : nm \\ ad : gh \end{cases}, \text{ oder weil } nm = ei$$

$$abcd : gefh = \begin{cases} cn : ei \\ ad : gh \end{cases}$$

Da sich nun Parallellogramme wie Dreyecke verhalten, welche mit ihnen gleiche Grundlinien und Höhen haben, so gilt dieser Satz auch bey Dreyecken.

§. 201.

Zusatz.

Aus $abcd : gefh = \begin{cases} cn : ei \\ ad : gh \end{cases}$ folgt auch abcd : gefh = cn. ad : ei. gh. d. h. die Flächen zweyer Parallellogramme also auch zweyer Dreyecke verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Höhen mit den Grundlinien multipliciret.

§. 202.

Zusatz.

Wenn abcd = gefh seyn soll, so ist auch cn. ad = ei. gh und man hat cn : ei = gh : ad d. h. zwey Parallellogramme mithin auch zwey Dreyecke sind gleich groß, wenn sich ihre Höhen umgekehrt wie die Grundlinien verhalten.

§. 203.

Zusatz.

Ein Quadrat ist demnach so groß als ein Rechteck, wenn die Seite des Quadrats die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Seitenlinien des Rechteckes ist.

§. 204.

Lehrsatz.

Wenn man zwey gleichnahmigte Seitenlinien zweyer ähnlichen Dreyecke (fig. 72.) abc und efg zu Grundlinien annimmt, so verhalten sich die Grundlinien wie ihre Höhen.

Beweis.

Es ist das Dreyeck abd ∾ efh, mithin ab : ef = bd : fh. Weil nun ab : ef = ac : eg, so hat man auch bd : fh = ac : eg.

§. 205.

Zusatz.

Es ist das Dreyeck abc : efg = $\begin{cases} ac : eg \\ bd : fh \end{cases}$, weil nun bd : fh = ac : eg, so ist auch abc : efg = $\begin{cases} ac : eg \\ ac : eg \end{cases}$ d. h. das Verhältniß ähnlicher Dreyecke ist dem verdoppelten Verhältnisse ihrer Seitenlinien gleich.

§. 206.

Zusatz.

Aus abc : efg = $\begin{cases} ac : eg \\ ac : eg \end{cases}$ folgt auch acb : efg = $ac^2 : eg^2$ oder ähnliche Dreyecke verhalten sich

zu

zu einander, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seitenlinien. Weil nun ferner ähnliche Figuren durch gleichnahmige Diagonallinien in ähnliche Dreyecke getheilt werden können, so verhalten sich überhaupt die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate gleichnahmigter Seitenlienien.

§. 207.

Zusatz.

Aehnliche reguläire Polygone verhalten sich demnach wie die Quadrate der größten oder der kleinsten Halbmeßer.

§. 208.

Zusatz.

Wenn ein Paar ähnliche regulaire Polygone in und um den Kreis sind beschrieben worden, so sey die Fläche des äussern $= Q$, und des innern $= q$, so hat man (fig. 67.) $Q : q = ac^q : cf^q = cd^q : ch^q$. Hieraus ergiebt sich nun $\frac{Q}{q} = \frac{ac^q}{cf^q} = \frac{cd^q}{ch^q}$ d. h. der Exponent des Verhältnißes der Fläche des äussern gegen die Fläche des in dem Kreise beschriebenen ähnlichen reguläiren Polygons findet man, wenn das Quadrat des größten Halbmeßers eines dieser Polygone durch das Quadrat des kleinsten Halbmeßers dividiret wird.

§. 210.

Aufgabe.

Man soll in und um dem Kreis ein Paar ähnliche reguläire Polygone von so vielen Seiten, verzeichnen,

zeichnen, daß der Exponent des Verhältnißes der Fläche des äussern gegen die Fläche des innern kleiner als eine Zahl wird, welche um etwas sehr weniges größer als 1.

Auflösung.

Es seyn eine sehr große Zahl, so ist $1 + \frac{1}{n}$ um etwas sehr weniges größer als 1. Man theile nun den Halbmeßer (fig. 68.) ac in n gleiche Theile, und nehme $ak = \frac{1}{n}\,ac$, so ist $ck = ac + \frac{1}{n}\,ac = (1 + \frac{1}{n})\,ac$. Nun suche man zwischen ck und ca die mittlere Proportionallinie cb, so hat man $ck : cb = cb : ac$, also $ck.ac = cb^q$ oder, weil $ck = (1 + \frac{1}{n})\,ac$, $(1 + \frac{1}{n})\,ac^q = cb^q$, mithin $1 + \frac{1}{n} = \frac{cb^q}{ac^q}$. Nun laßen sich aber wie ein §. 194. die ähnlichen reguläiren Polygone verzeichnen.

Beweis.

Es sey Q die Fläche des äussern und q die Fläche des innern ähnlichen reguläiren Polygons, so ist $Q : q = cg^q : cf^q$ also $\frac{Q}{q} = \frac{cg^q}{cf^q}$. Nun ist $cg < cb$ und $cf = ca$, mithin $cg^q < cb^q$ und $cf^q = ca^q$, folglich auch $\frac{cg^q}{cf^q} < \frac{cb^q}{ca^q}$, aber $\frac{cb^q}{ca^q} = 1 + \frac{1}{n}$, demnach $\frac{cg^q}{cf^q} < 1 + \frac{1}{n}$ oder $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{n}$.

§. 211.

Zusatz.

Man kann also in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläire Polygone von so vielen Seiten ver-

zeichnen, daß das Verhältniß der Fläche des äussern gegen die Fläche des innern dem Verhältniße 1:1 so nahe kommmt als man will d. h. daß die Fläche des innern mit der Fläche des äussern beynahe zusammen fällt. Weil nun die Fläche eines regulären Polygons so groß als ein Dreyeck ist, deßen Grundlinie der Peripherie und deßen Höhe dem kleinsten Halbmeßer des Polygons gleich (§. 151.), die Kreisfläche aber zwischen den Flächen voriger beyder regulärer ähnlichen Polygone fallen muß, so ist auch die Kreisfläche so groß als ein Dreyeck, deßen Grundlinie der Peripherie und deßen Höhe dem Halbmeßer des Kreises gleich ist.

§. 212.

Lehrsatz.

Ein jeder Kreisausschnitt verhält sich zur Kreisfläche, wie der Bogen des Ausschnittes zur Peripherie des Kreises.

Beweis.

Man theile die Peripherie des Kreises in gleiche Bogen, und ziehe durch die Theilungspunkte nach dem Mittelpunkte des Kreises Halbmeßer, so enthält die ganze Kreisfläche eben so viele Sektoren (fig. 73.) wie abc, als die Peripherie Bogen wie ab enthält, aber auch der Sektor ace besteht aus so vielen Sektoren wie acb, als der Bogen ae Bogen wie ab enthält. Bedeutet also C die Kreisfläche, p die Peripherie des Kreises, S die Fläche des Sektors und a den dazu gehörigen Bogen, so ist $C:S = p:a$.

§. 213

§. 213.

Erklärung.

Eine Figur quadriren heißt ein Quadrat finden, welches so groß, als die gegebene Figur ist.

§. 214.

Zusatz.

Ein gegebenes Rechteck quadrirt man, wenn man die mittlere Proportionalinie zwischen den beyden Seitenlinien des Rechteckes sucht (§. 203.)

§. 215.

Zusatz.

Da nun ein jedes schiefwinklichtes Parallellogramm, ein jedes Dreyeck, und ein jedes Polygon, es mag regulär oder irregulär seyn, in ein eben so großes Rechteck verwandelt werden kann, so läßt sich auch eine jede von diesen Figuren qnadriren. Weil ferner eine Kreisfläche einem Dreyecke gleich, so könnte man dieses der Fläche gleiche Dreyeck, mithin die Kreisfläche selbst quadriren, nur müßte man eine Linie finden können, welche so groß als die Peripherie des Kreises wäre.

Siebentes Kapitel.

Von der Anwendung der Arithmetik auf die im vorigen Kapital vorgetragenen Lehren.

§. 216.

Lehrsatz.

Wenn die Grundlinie (fig. 74.) tu eines rechtwinklichten Dreyecks tux 1 Fuß lang, und die Höhe

in so viel Theile ist getheilet worden, als man Zolle auf 1 Fuß rechnet, darauf durch alle Theilungspunkte mit der Grundlinie parallelle Linien gezogen werden, so ist ab ein Zoll, cd zwey Zolle, ef 3 Zolle u. s.

Beweis.

Es sey tux ein rechtwinklichtes Dreyeck, und mit der Grundlinie tu die Linien rs, pq, no, lm u. s. parallel gezogen, so ist xt : tu = ax : ab, weil das Dreyeck tux ∾ abx. Da nun xt = 10, so wie tu = 10, xa = $\frac{1}{10}$, so muß ab auch $\frac{1}{10}$ seyn, oder 10 : 10 = $\frac{1}{10}$: $\frac{1}{10}$. Es ist aber $\frac{1}{10}$ von einem Fuße 1 Zoll, also muß ab = 1 Zoll seyn. Aus eben dem Grunde hat man cd = 2 Zoll, ef = 3 Zoll u s. f.

§. 217.

Zusatz.

Hierauf gründet sich die gemeine Art einen so genannten verjüngten Maasstab zu verfertigen. Man ziehe nemlich eine gerade Linie (fig. 75) ab, theile sie in 10 gleiche Theile, verzeichne in b den rechten Winkel abd, und mache alle übrige Linien aus den Theilungspunkten der Linie ba mit bh parallel. Alsdenn nehme man eine beliebige Länge bd an, trage sie etliche mal auf bh, und ziehe aus diesen Punkten mit ab parallelle Linien. Eine solche Länge als bd theile man in 10 gleiche Theile, ziehe aus 9 nach a eine gerade Linie, und mit dieser alle übrige aus den Theilungspunken 8, 7, 6, 5 u. s. parallel, so ist geschehen was verlangt ist.

§. 218.

§. 218.

Zusatz.

Man nehme bd als eine Ruthe an, so ist auch dh eine Ruthe. Sollte man nun eine Linie meßen, welche z. E. $1^{\circ}\ 5^{'}\ 3^{''}$ wäre, so setze man den einen Schenkel des Zirkels in y, und öfne den andern so weit bis er in x komme, so wird die Eröfnung des Zirkels $1^{\circ}\ 5^{'}\ 3^{''}$ enthalten. Denn es ist $hd = 1^{\circ}$, $d5 = 5^{'}$ und endlich bis $x = 3^{''}$.

§. 219.

Forderungssatz.

Die Größe der Winkel auf dem Felde in Graden zu finden.

Die gemeine Bewerkstelligung dieser Forderung geschiehet vorzüglich

1) durch das sogenannte Prätorianische Meßtischgen (mensula praetoriana).
2) durch das Astrolabium
3) durch die Boussole
4) durch die Zollmannische Scheibe.

Die Mensel ist ein Reisbret, worauf Pappier gespannt werden kann, und welches auf ein Stativ oder Gestelle geschraubet wird, um Winkel mittelst eines Diopterlineals zu meßen. Das Astrolabium ist ein großer Transporteur, welcher unten unbewegliche Dioptern, oben aber ein Diopterlineal in dem Mittelpunkte also beweglich besitzet, daß Winkel damit gemeßen werden können. Die Boussole ist eine meßingene Dose, in deren Mitte eine Magnetnadel frey auf einem spitzen Stifte spielet, und worüber ein Glas gemacht worden. In diesem Ge-

häuse ist ein ganzer Zirkel befindlich, der in 360° eingetheilet ist. Dieses Gehäuse wird auf ein accurat quadratisches meßingenes Blech also befestiget, daß die eine Seite mit der Mittagslinie parallel läuft. Auf die Mittellinie werden am Ende Dioptern aufgesetzet, durch welche man nach den zu beobachtenden Punkten visiren kann, um Winkell dadurch zu meßen. Mehrere Arten von Boussolen findet man in Zollmanns Geodäsie und in Penthers praktische Geometrie beschrieben. Die Zollmannische Scheibe besteht 1) aus einer runden Scheibe vom Holze, in deren Mittelpunkte ein kleiner meßingener Cylinder mit einer Schraube befindlich ist, auf diese Scheibe wird ein Blatt Pappier mit Leim veste gemacht. Uebrigens hat sie keine Eintheilung in Grade. 2) Aus einem Visirlineal von Meßing oder gutem Holze, deßen Seite accurat durch den Mittelpunkt des Cylinders läuft, das Lineal selbst aber um den Cylinder ohne Wackeln herumgedrehet, und nachmals mit der Schraube fest gestellet werden kann.

§. 220.

Aufgabe.

Die Weite zweyer Oerter zu meßen, zu deren beyden man aus einen angenommenen Standpunkte kommen kann.

Auflösung mit dem Meßtischgen.

Man stelle das Meßtischgen über den Standpunkt c (fig. 76.) visire darauf mittelst des Diopterlineals nach a und b, ziehe sogleich die Linien dc

und

und ec, und mache sie nach dem verjüngten Maasstabe so groß als ac und bc nach dem großen Maasstabe sind, so ist de im kleinen so groß als ab im großen.

Auflösung mit dem Astrolabio.

Man bringe abermals das Astrolabium auf c und meße mittelst des beweglichen Diopterlinials die Größe des Winkels c. Diesen Winkel trage man mittelst des Transporteurs auf ein Blatt Pappier, und mache alsdenn cd und ce nach dem kleinen Maasstabe so groß als ac und cb im großen waren. Denn die Dreyecke acb und ced sind einander ähnlich.

§. 221.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Oeter zu meßen, zu deren einen man nur aus einem angenommenen Standpunkte kommen kann.

Auflösung mit dem Meßtischgen.

Man meße wie in voriger Aufgabe ecf mittelst des Diopterlinials (fig. 77.), und mache cf im kleinen so groß als cb im großen. Nun bringe man das Tischgen in b, so daß der Punkt f auf b und die Linie fc genau auf bc falle, visire mit dem Diopterliniale aus dem Punkte b nach a und ziehe bd, so wird bd den Schenkel ce in dem Punkte e schneiden, und bd im kleinen so groß als ab im großen seyn.

Auflösung mit dem Astrolabio.

Man meße die Winkel c und b, trage darauf den Winkel c mittelst des Transporteurs auf ein Blatt Pappier, mache cf im kleinen so groß als cb im großen, und lege an den Punkt f den Winkel b, so wird fe die Linie seyn, welche im kleinen so groß als ab im großen ist.

§. 222.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Oerter zu meßen, zu deren keinen man kommen kann.

Auflösung mit dem Meßtischgen.

Man nehme die Standlinie cd (fig. 78.) nach Belieben an, meße die Winkel acb und bcd, und mache cg im kleinen so groß als cd im großen. Darauf bringe man die Mensel in d, so daß der Punkt g auf d und cg auf cd falle, und meße auch die Winkel cda und adb, so werden sich die Schenkel in f und e schneiden, und fe wird im kleinen so groß als ab im großen seyn.

Auflösung mit dem Astrolabio.

Man meße die Winkel acb, bcd, adc, und bda und die Linie bd; darauf zeichne man auf dem Pappiere die gerade Linie cd im kleinen so groß als cd im großen, mittelst des Transporteurs aber die gemeßenen Winkel acb und bcd in c, und die Winkel adc und bda in d, so wird ef nach den verjüngten Maasstabe eben so viel Theile haben, als ab im ordentlichen hat.

§. 223.

§. 223.

Aufgabe.

Die Höhe ab (fig. 79.) zu meßen.

Auflösung.

1. Fall. Wenn man aus einem angenommenen Punkte c nach dem untern Ende a kommen kann, so stelle man das Instrument gerade auf c in d, meße den Winkel bde und die Linie ca. Darauf mache man fd im kleinen so groß als ac im großen, errichte auf f die senkrechte Linie gf, und addire zu dieser die Stativhöhe fh, so wird gh im kleinen so groß als ab im großen seyn.

2. Fall. Kann man zu dem untern Ende c (fig. 89.) nicht kommen, so muß man zwey Standpunkte e und g annehmen, die Winkel d und f meßen, und das Dreyeck hlm nach dem verjüngten Maasstabe dem Dreyecke bfd ähnlich machen. Darauf läßt man aus dem Punkte h die senkrechte Linie hi herab, und addiret hierzu die Stativhöhe ik, da alsdenn kh im kleinen so groß als bc im großen ist.

Anmerk. Diese Aufgabe setzet voraus, daß der Boden wagrecht ist. Sollte dies nicht statt finden, so müßen Abänderungen in dem Verfahren gemacht werden, welche aber hier ohne große Weitläuftigkeit nicht verständlich seyn würden.

§. 224.

Erklärung.

Wenn die Seitenlinie eines Quadrats so lang, als eins von dem im §. 154. angegebenen Längen-

maaße z. E. eine Ruthe, ein Fuß, ein Zoll, eine Linie u. f. so nennt man es alsdenn eine Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll u. f.

§. 225.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Parallellogramms im Quadratmaasse zu finden, wenn man die Grundlinie und die Höhe im Längenmaasse meßen kann.

Auflösung.

Mann meße Grundlinie und Höhe des Parallellogramms mit einerley Längenmaaße, damit man Zahlen, welche ihre Längen angeben, von einerley Nahmen erhalte. Nun multiplicire man diese Zahlen in einander, das Produkt giebt den Flächeninhalt im Quadratmaasse an, welches mit demjenigen einerley Nahmen hat, womit die Grundlinie und Höhe sind gemeßen worden.

Beweis.

Es sey q (fig. 81.) das Quadratmaas und die Seite desselben = l, die Grundlinie des Parallellogramms aber ab und die Höhe de, so hat man abcd : q = ab. de : l. l. Weil nun 1 hier als 1 angenommen ist, so ist abcd : q = ab. de : 1 d. h. es ist das Quadratmaas q im Parallellogramm so vielmal enthalten, als das Produkt ab. de Eins enthält.

§. 226.

Zusatz.

Den Quadratinhalt eines Quadrats findet man, wenn man die Zahl, welche die Länge der Seitenlinie angiebt, mit sich selbst multipliciret.

§. 227.

§. 227.

Zusatz.

Ist die Seitenlinie eines Quadrats = 10^{I}, so enthält das Quadrat $100\ \square^{I}$, ist sie 10^{II}, so enthält es $100\ \square^{II}$, und so faßt jedes größere Quadratmaas 100 Quadratmaasse von dem nächstkleinern Nahmen. Ist aber die Länge der Seitenlinien = 12^{I}, so hält das Quadrat $144\ \square^{I}$; $1\ \square^{I\,I}$, $144\ \square^{II}$ u. s. und so enthält jedes größere Quadratmaas 144 Quadratmasse von dem nächstkleinern Nahmen. Jenes Quadratmaas nennt man Decimal- und dieses Duodecimalquadratmaas.

§. 228.

Zusatz.

Das Duodecimal- auf Decimalquadratmaas und umgekehrt dieses auf jenes zu reduciren, zeigt die Regel Detri. Wenn vorausgesetzt wird, daß 10^{I} Decimalmaas = 12^{I} Duodecimalmaas, so sind auch 100^{I} Decimalquadratm. = 144^{I} Duodecimalquadratm. Will man nun z. E. wißen, wie viel $63\ \square^{I}\ 95\ \square^{II}$ Decimalquadratm. nach Duodecimalquadr. betragen, so ist der Ansatz

$100\ \square^{I} : 63\ \square^{I}\ 95\ \square^{II} = 144\ \square^{I}$ oder

$10000\ \square^{II} : 6395\ \square^{II} = 144\ \square^{I}$

$125 : 1279 = 9$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 11511 \\ 125 \\ \hline 1125 \\ \hline 261 \\ 250 \\ \hline \end{array}\Big(\begin{array}{l} 92{,}088 \text{ Duodecim. quadr.} \\ \\ \\ \\ \\ 1100 \end{array}$$

1100
1000

1000
1000

0

§. 229.

Zusatz.

Weil jedes Dreyeck halb so groß als ein Parallellogramm, welches mit jenem gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, so findet man den Flächeninhalt eines jeden Dreyecks, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliciret, und dieses Produkt durch 2 dividiret. Es sey die Höhe des Dreyeckes = a und die Grundlinie = b, so ist der

Flächeninhalt $= \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}$ a. b $= \frac{1}{2}$ b. a. Demnach findet man allemal den Flächeninhalt eines Dreyecks, wenn man entweder die Höhe mit der Grundlinie multipliret, und die Helfte von diesem Produkte nimmt, oder die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe oder die ganze Grundlinie mit der halben Höhe uultipliciret.

§. 230.

Zusatz.

Es sey (fig. 82.) abcd ein Trapezium, deßen Parallelen bc und ad nebst der Höhe be im Längenmaasse bekannt. Man ziehe die Diagonale bd, so ist der Inhalt des Dreyecks abd $= \frac{1}{2}$ ad. be, und des Dreyecks dbc $= \frac{1}{2}$ bc. be, also des Trapezii

abcd

$abcd = \frac{1}{2} ad. be + \frac{1}{2} bc. be = \frac{1}{2} (ad + bc) be$, d. h. den Flächeninhalt eines Trapezii findet man, wenn man die Helfte der Summe beyder Parallellen mit der Höhe multipliciret.

§. 231.

Zusatz.

Ein jedes Polygon läßt sich durch Diagonallinien in Dreyecke theilen, demnach kann man auch den Inhalt eines jeden Polygons finden, wenn man den Inhalt eines jeden Drevecks für sich sucht, und alsdenn alles zusammenaddiret.

§. 232.

Zusatz.

Den Flächeninhalt eines jeden reguläiren Polygons findet man, wenn man die Peripherie deßelben mit dem kleinsten Halbmeßer multipliciret, und dieses Produkt durch 2 dividiret.

§. 233.

Erklärung.

Eine Figur in Grund legen heißt eine Figur auf dem Pappiere verzeichnen, welche der auf dem Felde ähnlich ist.

§. 234.

Aufgabe.

Eine Figur in Grund zu legen.

Auflösung.

Man stelle sich die Figur auf dem Felde in Dreyecke getheilt vor, und meße von jedem so viel, daß man

man eins zeichnen kann, das ihm ähnlich ist. Die vorzüglichsten Fälle dieser allgemeinen Auflösung sind folgende:

I. Kann man in der Figur nach Gefallen messen, wo man will, so nehme man in derselben den Punkt c (fig. 83.) willkührlich an, messe die Winkel um c und die geraden Linien ca, cb, cd, ce u. s. Nun kann man aber mittelst des Transporteurs um einen Punkt die gleichen Winkel abtragen, und die Schenkel im kleinen so groß machen, als sie im grossen sind, um dadurch ähnliche Dreyecke zu erhalten.

II. Kann man aus zweyen Orten die in Grund zu legende Figur übersehen, so nehme man (fig. 84.) ac zur Standlinie an, messe die Winkel an c, die gerade Linie ac, und die Winkel an a. Alsdenn nehme man cg im kleinen so groß als ac im großen, trage mittelst des Transporteurs die in a gemessenen Winkel in g, und die in c gemessenen in c, so werden die Schenkel dieser Winkel die Schenkel jener Winkel in Punkten schneiden, die durch gerade Linien zusammengezogen werden müssen, um eine Figur zu erhalten, die der auf dem Felde ähnlich ist.

III. Kann man in die Figur selbst nicht kommen, sie aber umgehen, so messe man alle Seiten und Winkel, und trage sie mittelst des Transporteurs und des verjüngten Maasstabes auf ein Blatt Pappier.

§. 235.

Aufgabe.

Es ist der Flächeninhalt eines Dreyecks nebst der Grundlinie gegeben, man soll dessen Höhe finden.

Auflösung.

Man verdoppele den Inhalt, und dividire denselben durch die Grundlinie des Dreyecks, der Quotient ist die verlangte Höhe.

Beweis.

Es sey der Inhalt des Dreyecks = c, die Grundlinie = b, und die Höhe = a, so ist $c = \frac{a.b}{2}$, also $2c = ab$ und $\frac{2c}{b} = a$.

§. 236.

Aufgabe.

Einen gegebene Fläche in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

1. Fall. Ist die gegebene Fläche ein Parallelogramm, so theile man die Grundlinie desselben in so viele Theile, als die Fläche getheilet werden soll, und ziehe aus den Theilungspunkten mit den Seitenlinien des Parallellogramms porallelle Linien.

2. Fall. Ist die gegebene Figur ein Dreyeck, so theile man ebenfalls die Grundlinie in so viel gleiche Theile, als das Dreyeck getheilet werden soll, und ziehe durch die Theilungspunkte nach der Spitze des Winkels, welcher der Grundlinie entgegengesetzet ist, gerade Linien.

3. Fall. Ist die gegebene Figur eine jede andere geradlinigte Figur, so rechne man den Quadratinhalt derselben aus, dividire diesen mit der Zahl, welche angiebt, in wie viel gleiche Theile die Figur getheilt werden soll, und nehme einen jeden Theil

als

als den Inhalt eines Dreyecks an, wovon eine Seitenlinie der Figur als die Grundlinie deſſelben betrachtet wird, und ſuche alsdenn deßen Höhe. Dieſe gefundene Höhe ſetze man auf die angenommene Grundlinie, und ziehe hiermit durch das Ende der Höhe eine Parallelle, ſo wird ſich das Dreyeck als der Inhalt des einen Theils in der Fläche zeichnen laßen. Wollte man aber den Inhalt des einen Theils nicht als ein Dreyeck in der Fläche haben, ſo zerlege man einen Theil in zwey oder mehrere Theile, und zeichne ſie in Geſtalt zweyer oder mehrere Dreyecke in der Figur aneinander.

Anmerk. Ein Feld in proportionirliche Theile zu theilen erfordert ebenfalls kein anderes Verfahren als dieſes, wenn nur die proportionirlichen Theile durch Hülfe der Geſellſchaftsregel ſind beſtimmet worden.

§. 237.

Erklärung.

Eine krumme Linie heißt **regulär**, wenn ſich ein Geſetz angeben läßt, nach welchen alle Punkte derſelben beſtimmt zu finden, und welche folglich darnach gezeichnet werden kann; **irregegulär** aber, wenn dies nicht möglich iſt. Das Geſetz, wornach der Gang einer regulären krummen Linie beſtimmt wird, läßt ſich allemal durch eine Gleichung ausdrucken, worinn zwey veränderliche Größen x und y vorkommen. Es ſey (fig. 85.) eo eine krumme Linie. Man wähle nun einen willkührlichen Punkt a, und ziehe durch denſelben die beyden geraden Linien ab und ac unter einen beliebigen Winkel (gewöhnlich

wöhnlich ist er ein rechter). Aus verschiedenen Punkten r, q, p, o u. f. der krummen Linie ziehe man auf beyde Linien ab und ac die geraden Linien io, hp, fq, dr und rk, ql, pm und on, jene mit ab und diese mit ac parallel. Die Theile ak, al, am, an u. f. auf der geraden Linie ab werden die Abscissen, und die Theile ad, af, ah, ai oder rk, ql, pm, on die Applikaten oder Ordinaten genennt. Aus diesem Grunde heißt auch ab die Abscissenlinie oder die Axe der Abscissen, und die Linie ac die Applikatenlinie oder die Axe der Applikaten oder Ordinaten, der willkührlich gewählte Punkt a heißt nunmehr der Ursprung oder der Anfangspunkt der Abscissen. Ausserdem werden auch beyde, eine Abscisse mit ihrer zugehörigen Ordinate Coordinaten genennt, wie ak und kr; al und lq u. f. Hieraus ist zu begreifen, daß, so bald die Abscisse sich ändert, auch die dazu gehörige Applikate sich ändern muß, daß also beyde die Abscisse und Applikate veränderliche Größen sind. Man pfleget die Abscisse durch x und die Applikate durch y auszudrucken.

§. 238.

Aufgabe.

Es ist der Halbmeßer eines Kreises $= r$ gegeben, man soll eine Gleichung für die Kreislinie finden.

1. Auflösung.

Nimmt man den Ursprung der Abscissen in des Kreises Mittelpunkte, so sey $cp = x$ (fig. 86.) und

$pm = y$. Man ziehe nun cm. so hat man $cm^q = cp^q + pm^q$ oder $r^q = x^q + y^q$ und daher $r^q - x^q = y^q$ oder $y = \pm\sqrt{(r^q - x^q)}$. Hieraus sieht man nun, daß die Applikate zwey für sich gleiche einander aber entgegengesetzte Werthe bekommt, weil mp verlängert den Kreis noch einmal in n trift, und $pm = pn$ aber pm entgegengesetzet ist.

2. Auflösung.

Soll der Anfangspunkt der Abscissenlinie der äusserste Punkt a des Durchmeßers ab seyn, so ist $ap = x$, $pm = y$ und $pb = 2r - x$. Es ist aber $ap : pm = pm : ph$ (§. 187.) oder $pm^q = ap.\ pb.$ mithin $y^2 = x(2r - x) = 2rx - x^2$ und daher $y = \pm\sqrt{(2rx - x^2)}$, wo abermals y zwey einander entgegengesetzte Werthe bekommt.

§. 239.

Zusatz.

Wird in der Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ die unbestimmte Größe $y = o$, so hat man $o = 2rx - x^2$ oder $2rx = x^2$ oder $2r = x$ d. h. wenn die Applikate y verschwindet, so wird die Abscisse dem Durchmeßer gleich, und die krumme Linie schneidet die Abscissenlinie in b. Wird endlich auch $x = o$, so wird der ganze Ausdruck $2r = x = o$, und die krumme Linie muß noch einmal die Abscissenliene rückwärts in dem Punkte a schneiden.

§. 240.

Erklärung.

Eine krumme Linie rektificiren heißt die Länge der krummen Linie durch Rechnung finden.

§. 241.

Aufgabe.

Die Kreislinie zu rektificiren.

Auflösung.

Es sey (fig. 87.) lefa eine Quadrant, und le ein Stück von dem Quadranten, ch und he die dazu gehörigen Coordinaten, welche dieses Stück bestimmen. Gesetzt nun es nehme der Bogen de um das unbestimmte Stück ekf = Δle zu, so wächst die Abscisse um hi = fg = Δch = Δx, und die dazu gehörige Applikate wird um das Stück eg = Δeh = Δy kleiner. Der Bogen le ist nun eine Funktion von x und y, weil die Größe desselben von den Coordinaten abhängt, demnach wird auch der Zuwachs eine Funktion von Δx und Δy seyn. Die Gränze des Bogens ekf ist die gerade ef, und es ist demnach in dem verschwindenden Zustande dle eine Differenzialfunktion von dx und dy. Nun ist ef = $\sqrt{(ge^2 + gf^2)}$ mithin d. le = $\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. Weil nun aus der Gleichung der Kreislinie (§. 238.) das Verhältniß zwischen x und y bekannt ist, so kann daraus $\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ in einer Funktion von x und dx oder in einer Funktion von y und dy gefunden werden. Nach n. 1. §. 238. hat man nun

$r^2 - x^2 = y^2$, also $-2xdx = 2ydy$ oder

$-xdx = ydy$ und $\frac{-xdx}{y} = dy$, folglich

$\frac{x^2dx^2}{y^2} = dy^2$ (§. 188. Rechenk.) oder, weil $y^2 = r^2 - x^2$

$\frac{x^2dx^2}{r^2 - x^2}$

$\frac{x^2\,dx^2}{r^2-x^2} = dy^2$. Ferner ist

$\frac{x^2\,dx^2}{r^2-x^2} + dx^2 = dy^2 + dx^2$ und wenn alles unter einerley Nenner gebracht wird

$$\frac{x^2\,dx^2 + r^2\,dx^2 - x^2\,dx^2}{r^2-x^2} = dy^2 + dx^2, \text{ oder}$$

$$\frac{r^2\,dx^2}{r^2-x^2} = dy^2 + dx^2 \text{ und daher}$$

$$\frac{r\,dx}{V(r^2-x^2)} = V(dy^2+dx^2) \text{ oder } r\,dx\,\frac{1}{V(r^2-x^2)} = V(dy^2+dx^2).$$

Nach dem §. 268. der Arithmet. im andern Exemp. findet man den Ausdruck

$$\frac{1}{V(r^2-x^2)} = r^{-1} + \tfrac{1}{2} r^{-3} x^2 + \frac{3}{2.4} r^{-5} x^4 + \frac{3.5}{2.4.6} r^{-7} x^6 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8} r^{-9} x^8 + \text{u. f. also}$$

$$r\,dx.\,\frac{1}{V(r^2-x^2)} = dx + \tfrac{1}{2} r^{-2} x^2\,dx + \frac{3}{2.4} r^{-4} x^4\,dx + \frac{3.5}{2.4.6} r^{-6} x^6\,dx + \frac{3.5.7}{2.4.6.8} r^{-8} x^8\,dx + \text{u. f.}$$

Integriret man nun, so wird

$$\text{f. } r\,dx.\,\frac{1}{V(r^2-x^2)} = x + \frac{1}{2.3} r^{-2} x^3 + \frac{3.}{2.4.5} r^{-4} x^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7} r^{-6} x^7 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9} r^{-8} x^9 + \text{u. f. §. 320.}$$

Ist

Ist der Halbmeßer des Kreises = 1 (z. E. eine Ruthe, ein Fuß u. d. g.) so wird der Bogen le =

$$x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{3}{2.4.5}x^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9 \text{ u. f.}$$

Wird die Abscisse x = der Helfte des Halbmeßers, folglich = $\frac{1}{2}$, so wird der Bogen le = $\frac{1}{3}$ von dem Quadranten (§. 124.) oder $\frac{1}{6}$ von der halben Peripherie, und die Länge des Bogens le =

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{2.4.5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7}\cdot\frac{1}{2^7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}\cdot\frac{1}{2^9} + \text{u. f.}$$

Berechnet man diese Reihe in Decimalbrüchen, und addiret alles gehörig zusammen, so bekömmt man 0,52359877 für den 6ten Theil der halben Peripherie, folglich für die halbe Peripherie = 3,14159262. u. f.

§. 242.

Zusatz.

Wenn also der Halbmeßer des Kreises = 1 gesezet wird so ist das Verhältniß des Halbmeßers zur halben Peripherie = 1 : 3, 141 — — und eben dies ist auch das Verhältniß des Durchmeßers zur Peripherie. Man setze ein für allemal die Zahl 3,14159 — — = π, so kann man die beym Kreise vorkommende Rechnungen sehr leicht übersehen. Es bezeichne p die Peripherie, d den Durchmeßer und r den Halbmeßer eines Kreises, so hat man 1 : π = d : p oder 1 : π = 2r : p und daher p = πd oder p = 2πr. Für das Verhältniß 1 : π = d : p fand schon Archimedes, welcher die ersten Untersuchungen über die Kreis-

meßungen anstellte, die Gränzen 7:22 und $7:21\frac{97}{71}$, und Metius 113:355. Auf einem sehr mühsamen Wege fand Ludolph von Ceulen das Verhältniß 1:3,14159265389 32384626433838795o. In den mehresten Fällen, welche in der Ausübung vorkommen, rechnet man ziemlich scharf, wenn man $\pi = 3{,}1416$ setzt, weil alsdenn der Fehler noch nicht 0,0001 beträgt.

§. 243.

Zusatz.

Ist die Länge der Peripherie gegeben, und der ganze oder halbe Durchmeßer zu suchen, so findet man $d = \frac{p}{\pi} = \frac{1}{\pi} p$ und $r = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot p$. Der Bruch $\frac{1}{\pi}$ in Decimalstellen ausgedruckt giebt 0,318309886183790671 — — von welchen man in der Rechnung so viel Decimalstellen nimmt, als es die Schärfe der Rechnung erfordert.

§. 244.

Zusatz.

Es bezeichne a einen Kreisbogen, und n die Zahl der Grade, welche diesen Kreisbogen bestimmt, so hat man $360° : n° = p : a$ (§. 212.) oder, weil $p = 2\pi r$ (§. 242.); $360° : n° = 2\pi r : a$, folglich $a = \frac{n° \cdot 2\pi r}{360} = \frac{n}{180} \cdot \pi r$. Wäre aber der Bogen a im Längenmaaße bekannt nebst der Zahl der der Grade, welche der Bogen a faßet, so findet man $r = \frac{180}{n} \cdot \frac{1}{\pi} a$. Ist $a = r$, so ergiebt sich $n = 180 \cdot \frac{1}{\pi}$

$\frac{1}{\pi} = 57{,}291420 = 57^{\circ}\ 17^{\mathrm{I}}\ 44^{\mathrm{II}}\ 48^{\mathrm{III}}$. So viel Grade und Theile davon faßet also ein Kreisbogen, der so groß als der Halbmeßer ist.

§. 245.

Aufgabe.

Die Fläche eines Kreises im Quadratmaasse zu finden, wenn der ganze oder halbe Durchmeßer oder die Peripherie im Längenmaasse gegeben worden.

1. Auflösung.

Ist die Länge des Halb- oder Durchmeßers gegeben, so suche man nach dem §. 242. die Peripherie. Es sey der Durchmeßer $=$ d, der Halbmeßer $=$ r, die Peripherie $=$ p, und die Kreisfläche $=$ C, so ist $p = \pi d = 2\pi r$. (§. 242). Weil nun die Kreisfläche einem Dreyecke gleich, deßen Grundlinie die Peripherie, und deßen Höhe der Halbmeßer, (§. 211.), so ist $C = \frac{r.p}{2} = \frac{1}{2}rp = \frac{1}{2}pr = \frac{p.d}{4} = \frac{1}{4}p.d = \frac{1}{4}dp$.

2. Auflösung.

Weil $p = \pi d = 2\pi r$, so findet man auch den Flächeninhalt C, wenn man in den Ausdrücken der vorigen Auflösung statt p diese gleichen Größen setzet, und es wird $\frac{r.p.}{2} = \frac{2\pi r\,r}{2} = \pi rr$ und $\frac{pd}{4} = \frac{\pi dd}{4}$ $\frac{1}{4}\pi dd$, da man $\frac{1}{4}\pi = 0{,}7853982$ — findet, wovon jedesmal so viele Decimalstellen genommen werden, als es die Schärfe der Rechnung erfordert.

3. Auflösung.

Ist die Peripherie des Kreises gegeben, so suche man nach §. 243. den Halb- oder Durchmeßer, da man alsdenn nach der ersten oder zweyten Auflösung den Flächeninhalt C finden kann.

§. 246.

Zusatz.

Aus $C = \pi rr$ und $C = \frac{1}{4}\pi dd$ ergiebt sich $C : rr = \pi : 1$ und $C : dd = \frac{1}{4}\pi : 1$ d. h. die Fläche des Kreises verhält sich zum Quadrate des Halbmeßers $= \pi : 1$ oder zum Quadrate des Durchmessers $= \frac{1}{4}\pi : 1$.

§. 247.

Zusatz.

Es sey G die Fläche eines andern Kreises, D der Durchmeßer und R der Halbmeßer, so ist $G = \pi RR$ und auch $\frac{1}{4}\pi . D.D$, folglich $G : RR = \pi : 1$ und $G : DD = \frac{1}{4}\pi : 1$. Da nun $C : rr = \pi : 1$ und $C : dd = \frac{1}{4}\pi : 1$ so hat man auch $C : rr = G : RR$ und $C : dd = G : DD$ oder $C : G = rr : RR = dd : DD$ d. h. die Flächen zweyer ungleicher Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Halb- oder Durchmeßer.

§. 248.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt des Kreisausschnittes (fig. 9.) acbg zu finden, wenn der Halbmeßer ac und die Anzahl der Grade des Bogens agb gegeben worden.

1. Auflösung.

Man suche nach den 244. §. den Bogen agb im Längenmasse, multiplicire diesen mit dem Halbmeßer, und dividire dieses Produkt durch 2. der Quotiente ist der Flächeninhalt des Kreisausschnittes.

2. Auflösung.

Man suche die Kreisfläche und spreche, wie sich verhalten 360°: den Graden des Bogens agb, so verhält sich die Kreisfläche zu der Fläche des Kreisausschnittes.

Beweis.

Es sey die Länge des Bogens agb = a, der Halbmeßer = r, der Kreisausschnitt acbg = f, und die Peripherie des Kreises = p, so hat man p : a = $\frac{1}{2}$ pr : f (§. 212.), mithin $f = \frac{\frac{1}{2} pr. a}{p} = \frac{1}{2} ra$ also ist der Kreisausschnitt einem Dreyecke gleich, deßen Grundlinie der Bogen, und dessen Höhe der Halbmeßer ist. Weil nun ferner 360° : n° = p : a, so hat man auch 360° : n° = $\frac{1}{2}$ pr : f.

§. 249.

Aufgabe.

Es ist die Länge der Seitenlinie ab (fig. 54.) eines regulären Polygons nebst dem größten Halbmesser ac gegeben, man soll den kleinsten Halbmeßer ce finden.

Auflösung.

Weil ce auf ab senkrecht ist, so ist ae = $\frac{1}{2}$ ab (§. 119.) Nun ist $ac^2 = ae^2 + ec^2$, also auch ac^2

$\frac{1}{4}ab^2 + ec^2$ und daher $ac^2 - \frac{1}{4}ab^2 = ce^2$ mithin $\sqrt{(ac^2 - \frac{1}{4}ab^2)} = ec$,

§. 250.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt des Kreisabschnittes def (fig. 9.) zu finden, wenn der Halbmeßer cd nebst der Sehne df gegeben sind.

Auflösung.

Man suche nach den §. 248. den Inhalt des Kreisausschnittes dcfg, und nach den §. 249. die Entfernung ch der Sehne df von dem Mittelpunkte c. Diese Entfernung ist zugleich die Höhe des Dreyecks dcf, wenn df zur Grundlinie angenommen wird, und man kann alsdenn den Inhalt des Dreyecks finden. Hiernachst subtrahire man den Inhalt des Dreyecks von dem Inhalt des Sektors, der Rest ist der Inhalt des Segments.

§. 251.

Zusatz.

Wäre die Höhe he nebst der Sehne df gegeben, so könnte man ansetzen $eh : \frac{1}{2}df = \frac{1}{2}df : gh$, und man erhält $eh + gh =$ dem Durchmeßer, und daraus den Halbmeßer, und alsdenn auch $ce - eh = ch$, da sich alsdenn der Kreisabschnitt ebenfalls berechnen ließ.

§. 252.

Aufgabe.

Es sey die Kreisfläche C gegeben, man soll den Halbmeßer r und den Durchmeßer d finden.

Auf-

Auflösung.

Weil $C = \pi rr$, so findet man $\frac{C}{\pi} = rr$ und $\sqrt{C.\frac{1}{\pi}} = r$ und $2\sqrt{\frac{1}{\pi}.C} = d$.

§. 253.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt des Ringes (fig. 13.) daegfb zu finden wenn die Halbmeßer ca und cb sind gegeben worden.

Auflösung.

Man subtrahire das Quadrat des Halbmeßers cb von dem Quadrat des Halbmeßers ca, und multiplicire diese Differenz mit π, das Produkt ist der Flächeninhalt des Ringes.

Beweis.

Es ist $fbg = \pi . cb^2$ und $dae = \pi . ca^2$ mithin $dae - fbg = \pi ca^2 - \pi cb^2 = (ca^2 - cb^2)\pi$.

§. 254.

Aufgabe.

Die Seitenlinie eines Quadrats, welches einer gegebenen Figur gleich ist, zu finden.

Auflösung.

Man suche den Inhalt der gegebenen Figur im Quadratmaasse, aus diesem ziehe man die Quadratwurzel, diese giebt die Seitenlinie des gesuchten Quadrats im Längenmaasse an, das mit der gegebenen geradlinichten Figur einerley Quadratinhalt hat.

Zweyter Theil.

Von der körperlichen Geometrie

Erstes Kapitel.

Von der Lage der Ebenen und geraden Linien.

§. 255.

Erklärung.

Wenn man sich einen geometrischen Körper vorstellet, so gedenket man sich einen Raum, welchen eine stetige ausgedehnte Größe nach allen Seiten ausfüllt und in Gränzen eingeschloßen ist. Diese Gränzen heissen nun die **Oberflächen** des Körpers, welche so wohl eben als krumm seyn können, und dem Körper die so genannte **Figur** oder **Gestalt** geben.

§. 256.

Zusatz.

Eine ebene Fläche kann keinen körperlichen Raum einschließen, wohl aber eine krumme z. E. die Oberfläche eines Eyes, einer Kugel u. s.

§. 257.

§. 257.

Forderungssatz.

Durch zwey Punkte (fig. 88.) a und b, auch durch drey Punkte a, b, c, welche nicht in gerader Linie liegen, kann eine Ebene geleget werden.

§. 258.

Grundsatz.

Die Lage einer Ebene ist noch nicht bestimmt, wenn sie durch zwey Punkte geleget worden, denn man könnte sie um die gerade Linie ab noch in jede Lage drehen. So bald aber die Ebene durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie sind, geleget worden, so ist die Lage derselben völlig bestimmt.

§. 259.

Zusatz.

Wenn also durch drey nicht in gerader Linie liegenden Punkten mehr als eine Ebene geleget wird, so müßen sie insgesammt zusammenfallen.

§. 260.

Zusatz.

Eine jede gerade Linie, ein jeder ebener Winkel, und ein jedes Dreyeck muß in einer Ebene sich befinden.

§. 261.

Zusatz.

Durch einerley gerade Linie ab (fig. 89.) können mehr als eine Ebene geleget werden, und sie haben

ben alle auſſer dieſer geraden, nichts weiter mit einander gemein. Zwey Ebenen alſo, welche nach verſchiedenen Richtungen laufen, haben eine gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie, wenn ſie gehörig erweitert werden.

§. 262.

Zuſatz.

Wenn eine gerade Linie (fig. 90.) ab die Ebene de in c trift, ſo hat ſie mit der Ebene nichts weiter gemein, als dieſen einzigen Punkt c. Denn gienge die Linie nach durch einen andern Puukt f in der Ebene de, ſo müßte ſie ganz in der Ebene liegen (§. 260.).

§. 263.

Erklärung.

Wenn eine gerade Linie ab eine Ebene de in dem Punkte c ſo trift, daß ſie mit allen geraden Linien gh, ik, lm u. ſ., welche in der Ebene de durch den Punkt c gezogen worden, rechte Winkel macht, ſo ſagt man, die Linie ac ſtehe auf der Ebene de ſenkrecht, lothrecht, bleyrecht, perpendikulär.

§. 264.

Lehrſatz.

Weno eine gerade Linie ac die Ebene de in dem Punkte c trift, und auf zweyen in der Ebene durch dieſen Puukt gezogenen Linien fg und lm ſenkrecht ſteht, ſo ſteht ſie auf der ganzen Ebene ſenkrecht.

Auch umgekehrt, wenn die gerade Linie ac von dreyen oder mehrern geraden Linien in einerley

Punk-

Punkte c senkrecht geschnitten wird, so liegen diese Linien alle in einerley Ebene.

Beweis.

Man mache cl = cm, cf = cg, und ziehe fm und lg, so laufen lg und fm mit einander parallel; zwischen diesen Parallellen ziehe man noch ik durch c, so ist ci = ck, das Dreyeck ckf = cig und ckm = cli, mithin km = li und fk = ig. Ferner ziehe man die Linien ag, ai, al, af, ak und am, so wird das Dreyeck acg = acf, weil gc = cf, ca = ca, und der Winkel acg = ach = R, und das Dreyeck acm = acl, indem cl = cm, und der Winkel acl = acm = R, mithin af = ag und al = am. Nun war ferner km = li, und der Winkel amk = ali, also muß auch das Dreyeck ali = amk, und daher ai = ak seyn. Weil nun ci = ck, und ca = ca, so ist auch das Dreyeck aci = ack, folglich der Winkel aci = ack = R und ac auf ik senkrecht. Weil nun dieser Beweis von allen geraden Linien gilt, welche durch den Punkt c auf der Ebene de gezogen werden, so steht ac auf der Ebene de senkrecht.

Die Ebene des Winkels kcm wird von der Ebene des Winkels acf in einer geraden Linie geschnitten, welche in beyden Ebenen zugleich liegen muß (§. 261.) diese Durchschnittslinie soll aber auf ac senkrecht seyn, mithin muß sie mit cm und kc in einerley Ebene liegen, und daher cf selbst die Durchschnittslinie seyn.

§. 265.

§. 265.

Zusatz.

Aus einerley Punkt c in der Ebene de kann nur die einzige senkrechte Linie ac errichtet werden. Denn wäre auch cn eine senkrechte Linie, so müßte acf so wohl als auch ncf = R seyn, welches nicht seyn kann (§. 14.).

§. 266.

Zusatz.

Durch einerley Punkt a über der Ebene de kann nur die einzige senkrechte Linie ac auf die Ebene herabgelassen werden. Denn wäre auch af senkrecht auf de, so wäre es möglich, daß in dem Dreyecke acf zwey rechte Winkel seyn könnten. Demnach ist ac die Entfernung des Punktes a von der Ebene de.

§. 267.

Erklärung.

Eine Linie läuft mit einer Ebene parallel, wenn beyde eine solche Lage gegen einander haben, daß sie nie zusammenstoßen können, man mag sie so weit erweitern als man will.

§. 268.

Zusatz.

Wenn in der Ebene cd (fig. 91.) eine gerade Linie ef mit ab parallel läuft, so muß auch ab mit der Ebene cd parallel seyn. Denn beyde parallele Linien ab und ef befinden sich in einerley Ebene, welche die Ebene cd in der geraden Linie ef

schnei-

schneidet. Sollte nun ab mit cd zusammenstoßen, so müßte es in einem Punkte seyn, welcher in beyden Ebenen zugleich befindlich wäre also gewiß in der Durchschnittslinie ef wider die Voraussetzung. Auch umgekehrt, wenn ab mit der Ebene cd parallel läuft, so muß auch ab mit einer in der Ebene cd gezogenen geraden Linie ef parallel seyn.

§. 269.

Erklärung.

Wenn eine gerade Linie ab (fig. 92.) die Ebene cd in einem Punkte b trift, und man läßt aus einem Punkte a der geraden Linie ab auf die Ebene cd die senkrechte Linie ae herab, zieht alsdenn be, so heißt der Winkel abe der Neigungswinkel der geraden Linie ab gegen die Ebene cd. Ist dieser Neigungswinkel ein rechter Winkel, so fällt ae auf ab, und es steht ab senkrecht auf cd, ausserdem schief.

§. 270.

Zusatz.

Den Neigungswinkel der Ebene ab (fig. 93.) gegen cd findet man, wenn man in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie ef einen Punkt g willkührlich annimmt, und durch diesen Punkt auf beyde Ebenen die geraden Linien hg und gk ziehet. Ist nun dieser Neigungswinkel ein rechter, so steht alsdenn die Ebene ab auf der Ebene cd senkrecht.

§. 271.

Lehrsatz.

Wenn die Linie ef (fig. 94.) auf der Ebene ab senkrecht stehet, so muß auch die Ebene cd, welche

durch die gerade Linie ef gelegt wird, auf der Ebene ab senkrecht seyn.

Beweis.

Die Ebene cd wird die Ebene ab in der geraden Linie ch schneiden, und in dieser geraden Linie liegt der Punkt f. Nun kann man auf der Ebene ab die gerade Linie gf auf die Ebene cd senkrecht ziehen. Weil nun efg = R, so ist er der Neigungswinkel der Ebene cd gegen ab, also ist cd auf ab senkrecht.

§. 272.

Zusatz.

Wenn zwey Ebenen einander in der geraden Linie schneiden, so steht die Durchschnittslinie auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht.

§. 273.

Zusatz.

Die gerade Linie hk (fig. 93.), welche auf einer von zweyen Ebenen cd und ab, die einander in der geraden Linie ef schneiden, senkrecht steht, kann nicht zugleich auf der andern Ebene senkrecht seyn. Denn wenn von den Punkten h und k die geraden Linien nach einem Punkte g in der Durchschnittslinie ef auf die Ebene ab und cd gezogen werden, so kann nicht zugleich ghk und hkg ein rechter Winkel seyn.

§. 274.

Zusatz.

Eine gerade Linie ef (fig. 94.), welche in der Ebene cd, die auf der andern Ebene ab senkrecht

steht

steht, sich befindet, und auf der Durchschnittslinie ch senkrecht ist, ist auch auf der Ebene ab senkrecht. Man ziehe nemlich auf der Ebene ab die Linie gf in dem Punkt f, so ist der Neigungswinkel der Ebene cd gegen ab = R = efg. (§. 272.), also auch ef auf ab senkrecht.

§. 275.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie ab (fig. 95.) auf der Ebene mn senkrecht steht, und eine andere gerade Linie cd mit ab parallel läuft, so muß auch diese auf der Ebene mn senkrecht stehen.

Beweis.

Die parallellen Linien ab und cd befinden sich in einerley Ebene, welche die Ebene mn in der geraden Linie bd schneidet. Nun ziehe man ad, so muß auch ad in der Ebene der Parallellen ab und cd sich befinden. Man ziehe ed in der Ebene mn auf bd senkrecht, mache de = ab, und ziehe ae, so ist der Winkel abd = bde = R, bd = bd, also auch ad = be, mithin paßen die Dreyecke ade und abe auf einander, und der Winkel ade = abe = R. Weil nun auch bde = R war, so ist auch ed auf der Ebene der parallellen Linien ab und cd senkrecht. Nun ist cdb = 2R — R = R, also steht cd auf mn senkrecht.

§. 276.

Zusatz.

Zwey gerade Linien ab und cd die auf einerley Ebene mn senkrecht stehen, laufen mit einander parallel

Denn man kann durch d eine gerade Linie ziehen, welche auf mn senkrecht steht, und mit ab parallel läuft, und diese muß mit cd zusammenfallen.

§. 277.

Zusatz.

Wenn zwey parallelle Linien auf einer Ebene senkrecht stehen, und es ist alsdenn die dritte ef mit jenem beyden auch parallel, wenn auch alle drey parallelle Linien nicht in einerley Ebene liegen, so steht auch die dritte auf jener Ebene ebenfalls senkrecht. Denn dc und ef befinden sich in einer Ebene, welche die Ebene mn in ed schneidet, weil nun cd senkrecht auf mn stehet, so muß auch fe senkrecht darauf stehen (§. 275.).

§. 278.

Lehrsatz.

Zwey Winkel sind gleich groß, wenn die Schenkel derselben mit einander parellel sind, wenn sie auch in einerley Ebene sich nicht befinden.

Beweis.

Man mache (fig. 96.) ab = de, bc = ef und ziehe ac und df, alsdenn ist das Dreyeck abc = dcf, mithin ac = df und abc = def.

§. 279.

Zusatz.

Demnach findet man den Neigungswinkel einer Ebene gegen eine andere gleich groß, man mag den Punkt in der Durchschnittslinie annehmen wo man will.

§. 280.

§. 280.

Zusatz.

Zwey Linien (fig. 97.) ab und cd, die mit einander parallel laufen, haben gegen einerley Ebene gleiche Neigungswinkel. Man nehme nehmlich die Punkte a und c willkührlich an, und laße ae und cf senkrecht auf die Ebene mn als die sogenannten Neigungslothe herab, und ziehe be und df, so sind beyde Dreyecke einander ähnlich, also der Winkel abe = cdf.

§. 281.

Lehrsatz.

Wenn zwey Ebenen (fig. 98.) ab und cd sich in gh schneiden, und auf der Ebene ef senkrecht stehen, so muß auch die Durchschnittslinie gh auf ef senkrecht seyn.

Beweis.

Man ziehe ih auf die Ebene cd, und kh auf die Ebene ab senkrecht, so ist ghk = ghi der Neigungswinkel der Ebenen ab und cd gegen ef, mithin ein rechter, also auch gh senkrecht auf ef.

§. 282.

Erklärung.

Parallelle Ebenen sind diejenigen, welche nie zusammenstoßen können, man mag sie nach allen Seiten so weit man will erweitern.

§. 283.

Lehrsatz.

Wenn zwey parallelle Ebenen (fig. 99.) ab und cd von einer dritten ef geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien gh und ik parallel, und die Neigungswinkel lmn und mop sind gleich groß.

Beweis.

Die beyden Durchschnittslinien gh und ik sind in einerley Ebene ef, zugleich ist aber auch gh in der Ebene ab und ik in der Ebene cd, welche mit jener parallel läuft. Sollten nun ik und gh zusammenstoßen, so müßten auch die Ebenen cd und ab zusammenfallen, welches der Voraussetzung entgegen. Ist ferner lmn der Neigungswinkel der Ebene ef gegen ab, so wird die Linie lm verlängert die Durchschnittslinie ik in dem Punkte o treffen, alsdenn ziehe man durch den Punkt o auf der Ebene cd die gerade Linie op, so läuft auch op mit mn parallel, also ist mop = lmn. Ferner ist io auf der Ebene des Winkels mop senkrecht, demnach ist mop der Neigungswinkel der Ebene ef gegen cd.

§. 284.

Zusatz.

Wenn eine gerade Linie auf zweyen Ebenen zugleich senkrecht ist, so sind die Ebenen mit einander parallel. Denn es ist der Winkel (fig. 100.) dab = abc = R mithin ad mit bc und eben darum ef mit gh parallel.

§. 285.
Zusatz.

Durch einen Punkt a läßt sich nur eine Ebene legen welche mit der Ebene gh parallel läuft.

§. 286.
Lehrsatz.

Wenn die Schenkel (fig. 101.) ab und de, und ac und df zweyer Winkel mit einander parallel laufen, so sind auch die Ebenen dieser Winkel mit einander parallel.

Beweis.

Man loße aus dem Punkte a die Linie ai senkrecht auf mn herab, und ziehe durch i die Linien ig und ih mit ac und ab parallel, alsdenn ist cai = 2R — aig = bai — aih = R, also ai auf op senkrecht, und eben daher op mit mn parallel (§. 285.).

§. 287.
Lehrsatz.

Parallelle Ebenen sind gleich weit von einander entfernt.

Beweis.

Wenn ai und bh auf mn senkrecht, also die Entfernungen der Punkte a und b von der Ebene mn sind, so laufen ai und bh mit einander parallel (§. 276.), aber auch ab und ih sind parallel, demnach ist ai = bh.

§. 288.
Zusatz.

Wenn drey Punkte a, b, c, die nicht in gerader Linie liegen, von der Ebene mn gleich weit entfernet

net sind, so ist eine durch die drey Punkte gelegte Ebene auch mit mn parallel. Denn es ist iac = 2R − aig = R = iab, also muß mn mit op parallel seyn.

§. 289.

Zusatz.

Auch umgekehrt alle Punkte a, b, c, d, welche von der Ebene mn gleich weit entfernet sind, müssen in einerley Ebene op liegen. Denn die Ebene op durch a, b, c gelegt läuft mit mn parallel, und sie muß die lothrechte Linie dk schneiden, und zwar in einem Punkte, welcher von der Ebene mn so weit entfernet ist, als die Punkte a, b, c davon entfernet sind, also gewiß in dem Punkte d.

§. 290.

Lehrsatz.

Zwey gerade Linien (fig. 102.) ab und cd werden von dreyen parallen Ebenen mn, op, qr in proportionirliche Theile geschnitten.

Beweis.

Man ziehe ad, so muß die Ebene des Winkels adc die Ebenen mn und op in den Linien fg und ac schneiden, die mit einander parallel laufen, so wie die Ebene des Winkels bad die Ebenen op und qr in den parallelen Linien ef und bd schneidet. Alsdenn hat man

be : ea = df : fa und
dg : gc = df : fa also auch
be : ea = dg : gc.

Zwey-

Zweytes Kapitel.

Von den Prismen, Pyramiden, Cylindern und Kegeln.

§. 291.

Erklärung.

Wenn drey oder mehrere Ebenen einander also schneiden, daß die Durchschnittslinien (fig. 103,) af, gb, ch, id, ck mit einander parallel laufen, so können diese Ebenen einen körperlichen Raum umschliessen, der nur an beyden Seiten, wohin die parallelen Durchschnittslinien laufen, noch unbegränzt ist. Diesen Raum nun völlig zu schließen, werden noch zwey Ebenen an jeder Seite eine erfordert, und wenn diese unter sich parallel sind, so heißt der also begränzte Körper ein **Prisma**, eine **Eckſäule**, ein **Pfeiler**. Die beyden parallen Ebenen heißen die **Grundflächen** (bases) und die Ebenen, die einander in parallellen Durchschnitten schneiden, die **Seitenflächen** (hedrae s. latera) des Prisma. Das Prisma erhält den Nahmen eines **dreyseitigen**, **vierseitigen**, **fünfseitigen** u. s. Prisma, nachdem es drey, vier, fünf u. s. Seitenflächen hat. Stehen nun die Seitenflächen mithin auch die parallellen Seitenlinien eines Prisma auf den Grundflächen senkrecht, so heißt es ein **gerades**, im Gegentheil ein **schiefes** Prisma.

§. 292.

Zusatz.

Die Seitenflächen eines Prisma sind Parallelogramme und insbesondere Rechtecke, wenn das Prisma gerade ist.

§. 293.

Zusatz.

Die Grundflächen eines Prisma sind gleiche und ähnliche Figuren; und wenn ein Prisma mit einer den Grundflächen parallellen Ebene geschnitten wird, so ist auch die Durchschnittsfigur den Grundflächen gleich und ähnlich.

§. 294.

Erklärung.

Prismen, deren Grundflächen Parallellogramme sind, heißen Parallellepipeda. Sind die Grundflächen der geraden Parallellepipedorum Rechtecke, so nennt man sie rechtwinklichte Parallellepipeda. Wenn die Grundflächen und Seitenflächen eines rechtwinklichten Parallellepipedi gleiche Quadrate sind, so wird es ein Würfel genennt.

§. 295.

Zusatz.

Ein jedes Parallellepipedum wird von sechs Parallellogrammen eingeschloßen, also der Würfel von sechs gleichen Quadraten.

§. 296.

Zusatz.

Jede zwey entgegengesetzte Seitenflächen der Parallellepipedorum sind mit einander parallel; demnach können

können in einem Parallellepipedo jede zwey entgegengesetzte Seitenflächen für die Grundflächen angenommen werden.

§. 297.

Erklärung.

Die Höhe eines Prisma ist die Entfernung der einen Grundfläche von der andern.

§. 298.

Lehrsatz.

Prismen, welche gleiche und ähnliche Grundflächen nebst gleichen Höhen haben, ausserdem aber die gleichnahmigten Seitenflächen gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt sind, sind gleich groß.

Beweis.

Wenn man die Grundflächen auf einander legt, so fallen dieselben nicht nur, sondern auch die gleichnahmigten Seitenflächen zusammen, mithin passen die Prismen in einander und sind folglich gleich groß (§. 10.).

§. 299.

Zusatz.

Wenn das Prisma adefb (fig. 104.) durch einer Ebene mit den Grundflächen parallel in der halben Höhe geschnitten wird, so ist alsdenn das abgeschnittene Prisma gabcih = dem abgeschnittenen Prisma dghife. Wenn also die Höhe eines Prisma in noch so viele gleiche Theile getheilet wird, und man schneidet durch diese Theilungspunkte das Prisma durch Ebenen, welche mit den Grundflächen paral-

parallel laufen, so müßen die daher entstandenen kleinen Prismen gleich groß seyn, denn sie paßen alle in einander.

§. 300.

Würfel also, welche gleiche Grundflächen haben, sind gleich groß; auf der größern Grundfläche aber stehet eine größerer und auf der kleinern ein kleinerer Würfel.

§. 301.

Erklärung.

Wenn ein Punkt a (fig. 105.) ausserhalb der Ebene einer geradlinichten Figur bcdef befindlich ist, und von demselben nach allen Winkelpunkten der geradlinigten Figur die geraden Linien ab, ac, ad, ae und af gezogen werden, so schließen die Ebenen der Dreyecke abc, acd, ade u. s. mit der Ebene der geradlinigten Figur bcdef einen körperlichen Raum ein, welcher eine Pyramide oder Spitzsäule genennet wird. Die geradlinigte Figur bcdef heißt die Grundfläche, und die ebenen Dreyecke abc, acd u. s. die Seitenflächen, der Punkt a die Spitze, und die Entfernung der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide. Die Anzahl der Seitenlinien der Grundfläche oder der Seitenflächen giebt der Pyramide den Nahmen einer dreyseitigen, vierseitigen, fünfseitigen u. s.

§. 302.

Lehrsatz.

Wenn eine Ebene die Pyramide mit der Grundfläche parallel schneidet, so ist die Durchschnittsfigur

gur der Grundfläche ähnlich, und das Verhältniß der gleichnahmigten Seitenlinien dieser Figuren ist gleich dem Verhältnißе ihrer Höhen von der Spitze der Pyramide; das Verhältniß der Ebenen dieser Figuren aber einerley mit dem Verhältnißе der Quadrate ihrer Höhen von der Spitze der Pyramide.

Beweis.

Die Durchschnittsfigur abc (fig. 106.) hat eben so viele Seitenlinien, als die Grundfläche efg. Weil nun die Seitenlinien ab, ac, cb mit ef, fg und ge parallel lauffen, so sind die Winkel a und e, b und f, c und g gleich groß. Ferner sind die Dreyecke ehg und ahc; ehf und ahb; fhg und bhc einander ähnlich, mithin hat man eg : ac = eh : ah, und ef : ab = eh : ah, demnach auch eg : ac = ef : ab, also sind efg und abc einander ähnlich. Läßt man ferner von der Spitze h die senkrechte Linie hi herab, so schneidet die Ebene des Winkels ehi die Durchschnittsfigur abc in der geraden Linie ad, und die Grundfläche efg in der geraden mit ad parallelen Linie ei, mithin ehi ∾ ahd, also eh : ha = hi : hd. Nun war eh : ah = eg : ac, demnach folgt auch hc : hd = eg : ac. Ferner hat man auch $hi^2 : hd^2 = eg^2 : ac^2$; aber $efg : abc = eg^2 : ac^2$, also $hi^2 : hd^2 = efg : abc$.

§. 303.
Lehrsatz.

Pyramiden, welche gleiche und ähnliche Grundflächen und gleiche Höhen haben, ausserdem aber die gleichnahmigten Seitenflächen gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt sind, sind gleich groß.

Beweis.

Beweis.

Die gleichnahmigten Seitenflächen auf einander gelegt fallen nicht nur sondern auch die Grundflächen auf einander demnach paßt die eine Pyramide in die andere und sind folglich gleich groß.

§. 304.

Erklärung.

Wenn die gerade Linie ba (fig. 107.) durch eines Kreises Mittelpunkt a gegen die Ebene desselben unter einen beliebigen Winkel geneigt ist, und durch des Kreises Peripherie eine krumme Fläche sich also erstrecket, daß eine jede gerade Linie, welche durch einen Punkt f der Peripherie des Kreises auf die krumme Fläche mit ab parallel gezogen ganz in dieser Fläche liegt, so schließen alsdenn die mit einander parallel laufenden Ebenen cg und dh mit der krummen Fläche einen körperlichen Raum ein, welcher eine **Walze, Rundsäule** oder ein **Cylinder** genennet wird. Die parallelen Ebenen dh und cg heißen die **Grundflächen**, und die gerade Linie ab die Axe des Cylinders. Steht die Axe ab auf den Grundflächen der Walze senkrecht, so heißt sie eine **gerade** oder **senkrechte**, sonst aber eine **schiefe Walze.**

§. 305.

Lehrsatz.

Die Grundflächen der Walze sind gleich große Kreise, durch deren Mittelpunkten die Axe derselben geht; auch giebt jeder mit den Grundflächen parallelle Schnitt einen eben so großen Kreis, durch deßen Mittelpunkt ebenfalls die Axe der Walze läuft.

Beweis.

Beweis.

Nach der Erklärung des vorigen §. ist cg ein Kreis, durch deßen Mittelpunkt a die Axe ab geht. Diese trift die andere Grundfläche in dem Punkte b. Wird nun ferner in der Peripherie des Kreises cg durch einen willkührlichen Punkt f auf die Cylinderfläche die Linie fe mit der Axe parallel gezogen, so trift auch ef die Ebene dh in dem Punkte e, welcher in dem Umfange der Figur dh sich befindet. Weil nun ef mit ba parallel ist, so ist auch eb = fa. Nun mag man einen Punkt in der Peripherie des Kreises annehmen, wo man will, und durch diesen Punkt auf die Cylinderfläche eine gerade Linie mit ab parallel ziehen, welche den Umfang der Figur dh trift, so ist dieser Punkt von b eben so weit entfernt, als der Punkt e von b d. h. es ist dh ein Kreis, welcher eben so groß als cg ist. Auch ist klar, daß jeder Schnitt, welcher mit den Grundflächen parallel geschieht, ein Kreis seyn müße.

§. 306.

Zusatz.

Ist cf unendlich klein, so kann man es als gerade annehmen, da alsdenn cfed als eine unendlich kleine Ebene betrachtet werden kann. Es ist also der Cylinder ein Prisma von unendlich vielen Seiten.

§. 307.

Zusatz.

Ein Schnitt durch die Axe des Cylinders giebt ein Parallellogramm, und zwar ein Rechteck, wenn der Cylinder senkrecht ist.

§. 308.

Erklärung.

Wenn wie beym Cylinder eine gerade Linie ab (fig. 108.) durch den Mittelpunkt b eines Kreises gegen die Ebene desselben unter einen beliebigen Winkel geneigt ist, und durch die Peripherie des Kreises eine krumme Fläche also läuft, daß jede gerade Linie, welche durch einen Punkt e der Peripherie nach a gezogen wird, ganz in der krummen Fläche liegt, so schließen die krumme Fläche und Kreisfläche einen körperlichen Raum ein, welcher ein Kegel genennt wird. Die krumme Oberfläche des Kegels heißt die **Kegelfläche**, die Kreisfläche die Grundfläche, und die gerade Linie ab die Axe, der Punkt a die **Spitze** und ac oder ae die **Seitenlinie** des Kegels. Steht die Axe des Kegels auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel ein **gerader**, ausserdem ein **schiefer Kegel.**

§. 309.

Zusatz.

Ein Schnitt durch die Axe des Kegels ist ein Dreyeck, welches gleichschenklicht ist, wenn der Kegel gerade ist.

§. 310.

Lehrsatz.

Wenn der Kegel acd mit einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten wird, so wird die Durchschnittsfigur ein Kreis, deßen Mittelpunkt in der Axe des Kegels liegt; auch ist das Verhältniß der Halbmeßer dieser Kreise mit dem Verhältniße der

Ent-

fernungen, und das Verhältniß der Kreisflächen mit dem Verhältniße der Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels einerley.

Beweis.

Man schneide den Kegel durch die Axe, so sind die daher entstandenen Dreyecke acb und agh einander ähnlich, mithin verhält sich $ab : ah = cb : gh$, demnach ist $gh = \frac{ah \times cb}{ab}$ allemal von gleicher Größe, man mag den Punkt in der Durchschnittsfigur annehmen, wo man will, also ist gk ein Kreis, deßen Mittelpunkt h in der Axe liegt. Zieht man ferner af auf cd, also auch auf gk senkrecht, so ist, weil hi mit bf parallel ist, $ab : ah = af : ai$. Nun war $ab : ah = cb : gh$, also hat man auch $cb : gh = af : ai$. Hieraus folgt ferner $cb^2 : gh^2 = af^2 : ai^2$; aber $cb^2 : gh^2 = cd : gk$, mithin auch $af^2 : ai^2 = cd : gk$.

§. 311.

Zusatz.

Es sey ce unendlich klein, so kann es als gerade, und die Fläche cea als ein unendlich kleines ebene Dreyeck betrachtet werden. Hieraus ist zu begreifen, daß ein Kegel eine Pyramide von unendlich vielen Seitenflächen ist.

§. 312.

Lehrsatz.

Zwey Parallellepipeda abcdgfe (fig. 109.) und alonmhgf auf einerley Grundfläche und gleicher Höhe, wenn auch zwey entgegengesetzte Seitenflächen

des einen mit zweyen entgegengesetzten Seitenflächen des andern nicht in einerley Ebene fallen, sind gleich groß.

Beweis.

Wenn die beyden Parallellepipeda gleich hoch sind, so fallen die Grundflächen ebcd und lonm in einerley Ebene em (§. 287.). Liegen nun die Seitenflächen ab ch und almh; fedg und fong in einerley Ebene, so sind die Punkte b, c, l, m, so wie e, d, o, n in geraden Linien; denn sie befinden sich in den Durchschnittslinien der Ebenen abm und fen gegen em. Ferner sind die Linien be und lo mit af, cd und mn mit hg, also alle unter sich parallel, mithin sind die Körper ablofe und chgnm dreyseitige Prismen. Ihre Grundflächen feo und dgn sind einander gleich und ähnlich, weil fe = gd, und fo = gn; überdem sind die gleichnahmigten Seitenflächen afeb und chgd, alof und hgnm, beol und cdnm gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt, also sind beyde Prismen gleich groß (§. 298.). Subtrahiret man von beyden gleichen Prismen den Körper edkilo, so wird der Körper befaikdc = lokihgnm, und hierzu afgkih addiret, abcdgfe = alonmhgf.

Man ziehe aus dem Punkte a in der ebenen Fläche afol die Linie ar bis sie die verlängerte ol in r treffe, alsdenn wird die Ebene des Winkels rah die Ebene hgnm in der geraden Linie hs, und die Ebene lonm in rs schneiden. Ferner ziehe man aus dem Punkte f die Linie fq mit ar parallel, so wird die Ebene des Winkels qfg die Ebene hgnm in der ge-

raden

raden gp und lonm in qp schneiden, und es läuft nun rq mit sp, rs mit qp, und sh mit pg parallel, also rq = sq = lo = mn nnd sh = gp = ar = fq = al. Demnach ist arqpshgf ein Parallelepipedum und = alonmhgf = abedchgf.

§. 313.

Zusatz.

Theilt man die Höhe in gleiche beliebige Theile, und schneidet beyde gleiche Parallelepipeda durch die Theilungspunkte mit Ebenen, die den Grundflächen parallel sind, so muß ein jeder Theil des einen Parallelepipedi mit einem jeden Theile des andern gleich groß seyn. Demnach geben auch zwey Parallelepipeda, welche einerley Grundflächen und gleiche Höhen haben, gleich große abgeschnittene Parallelepipeda, wenn sie mit Ebenen in gleichen Höhen geschnitten werden.

§. 214.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelepipedum (fig. 110.) af mit einer Ebene il den Seitenflächen ac und ef parallel geschnitten wird, so verhält sich das ganze Parallelepipedum af zum abgeschnittenen if, wie die Grundfläche ah des erstern zur Grundfläche ih des andern.

Beweis.

Man theile die Seitenlinie ae in gleiche beliebige Theile, lege alsdenn durch alle diese Theilungspunkte Ebenen mit den Seitenflächen ac und ef

parallel, so wird das ganze Parallellepipedum in so viei gleiche Parallellepipeda wie ao getheilt, als die Seitenlinie ae Theile enthält. Mithin begreift af den Theil ao eben so vielmal in sich, als ae den Theil an; aber auch ao befindet sich in if eben so vielmal als an in ie d. h. af : if = ae : ie. Nun ist ae : ie = ah : ih (§. 196.), also auch af : if = ah : ih.

§. 315.

Zusatz.

Aus der Proportion af : if = ah : ih folgt auch af — if : if = ah — ih : ih oder al : if = am : ih (§. 180. Arithm.) d. h. auch die abgeschnittenen Parallellepipeda perhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen.

§. 316.

Lehrsatz.

Zwey Parallellepipeda von gleichen Höhen und gleichen obgleich unähnlichen Grundflächen sind gleich groß.

Beweis.

Man setze anfänglich die beyden Parallellepipeda (fig. 111.) ec und xy gerade. Verlängert man nun die Seitenlinie eh bis n, so daß hn = zw, setzet an h den Winkel nhk = wZu, ziehet km mit hn und nm mit hk parallel, so ist hkmn ein Parallellogramm, welches dem Parallellogramm zwyu, gleich und ähnlich ist. Aus den Punkten k, n, m, h mache man die Linien kt, mo, np mit hd parallel, so fallen alle Punkte o, p, t dieser Linien in die

Ebene

Ebene ac, so daß man dadurch ein Parallelepipedum dtkmopnh erhält, welches mit dem Parallelepipedo yx gleiche und ähnliche Grundflächen und gleiche Höhe hat, mithin dtkmopnh = xy. Die Ebene des Winkels cdp schneidet die Ebene begf in der geraden cq. Zieht man nun aus den Punkten p und q die geraden Linien pq mit dc und qo mit cg parallel, verlängert fg bis o, und ziehet noch on, so wird eq ein Porallellepipedum, welches durch die Ebene hdcg mit den Seitenflächen eb und nq parallel geschnitten ist. Ferner verlängere man qp bis r, on bis l, cd bis s und gh bis i, und ziehe is und lr, so wird auch iphnprli ein Parallelepidedum, welches mit dem Parallelepipedo tdhnpomk einerley Grundfläche dhnp und gleiche Höhe hat, mithin dtilrpnh = dtkmop und daher dtilrpnh = xy. Ferner ist auch iq ein Parallellepipedum, welches durch die Ebene hnpd mit den Seitenflächen isrl und cqog parallel geschnitten worden, demnach hat man

hq : ho = ip : in. Nun ist
hq : ho = ec : eg, also auch
ip : in = ec : eg oder weil ip = dm und in = hm

dm : hm = ec : eg. Weil nun dm = xy und hm = zy

so ist auch xy : zy = ec : eg. Nach der Voraussezzung ist eg = zy, mithin ist auch ec = xy.

Sind aber die Parallellepipeda schief, so kann man bey jeden ein gerades verzeichnen, welches dem schiefen gleich. Nun sind aber die geraden einander gleich, mithin auch die schiefen.

§. 317.

Lehrsatz.

Ein jedes Parallellepipedum (fig. 112.) läßt sich mittelst des Diagonalschnitts dcba in zwey gleich große dreyseitige Prismen theilen.

Beweis.

Wenn das Parallellepipedum gerade ist, so ist für sich klar, daß das eine Prisma in das andere paße. Ist aber das Parallellepipedum schief, so lege man das abgeschnittene Prisma fabcde in das Prisma abghcd so, daß der Punkt a auf b zu liegen kommt, so wird die Linie af auf bk, fb auf ki und ab auf ib fallen. Eben so wird nun der Punkt d auf c, de längst cm, ec längst ml und dc längst lc fallen. Das Dreyeck abg = dch, ib = lc, ab = dc, und der Winkel aib = dlc, also ist das Dreyeck aib = dlc; ferner ist bk = mc, bg = ch, und der Winkel bkg = cmh, mithin das Dreyeck hmc = gkb; eben so erhellet, daß das Dreyeck ikb = lmc; und hieraus folgt, daß das Trapezium aikg = dlmh. Beyde agkbi und dhmcl sind Pyramiden von gleichen Grundflächen agki = dlmh, und gleichen Höhen; überdem sind auch die gleichnahmigten Seitenflächen gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt, also sind beyde Pyramiden gleich groß (§. 303.) und hieraus folgt, daß beyde dreyseitige Prismen gleich groß sind.

§. 318.

Zusatz.

Ein Parallellepipedum ist also so groß, als ein dreyseitiges Prisma, welches mit jenem gleiche Grund,

Grundfläche und gleiche Höhe hat, mithin sind auch zwey dreyseitige Prismen gleich groß, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

§. 319.

Lehrsatz.

Zwey Parallellepipeda von gleichen Höhen verhalten sich zu einander, wie ihre Grundflächen.

Beweis.

Wenn (fig. 113.) ab und gh zwey gerade gleich hohe Parallellepipeda, so kann man die Seitenlinien ac und ei nach d und f verlängern, und an ae ein Parallellogramm cf setzen, das so groß als gm ist. Nun lege man durch df eine Ebene mit cb parallel, und verlängere no und qb, bis sie die Ebene dr treffen, alsdenn erhält man das Parallellepipedum cr, welches mit dem Parallepipedo gh gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, mithin sind beyde gleich groß. Nun hat man ab : cr = ae : cf, also auch ab : gh = ae : gm.

§. 220.

Zusatz.

Dreyseitige Prismen von gleichen Höhen verhalten sich demnach, wie ihre verschiedenen Grundflächen.

§. 321.

Lehrsatz.

Ein dreyseitiges Prisma verhält sich zu einen jeden andern vielseitigen Prisma, wie des es ersten

ſtern Grundfläche zur Grundfläche des andern, wenn ſie gleiche Höhen haben.

Beweis.

Das vielſeitige Prisma (fig. 114.) aghbfedkic läßt ſich mittelſt der Diagonalſchnitte abdc und gdbi in ſo viele dreyſeitige Prismen theilen, ſo groß die Anzahl der Seitenlinien der Grundfläche weniger zwey iſt. Demnach ergiebt ſich pn : pqo = abfedc : cde; pn : pqo = abgidc : cdi; pn : pqo = gbhkdi : dik; mithin auch qn : pqo = abfedc + abgidc + gbhkdi : cde + cdi + dik oder pn : pqo = aghbfedkic : cedki.

§. 322.

Zuſatz.

Iſt pqo = cedki, ſo iſt auch lmnopq = aghbfedkic d. h. ein jedes dreyſeitige Prisma iſt mit einem vielſeitigen gleich, wenn beyde gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. Hieraus folgt nun der Satz allgemein: **Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen ſind gleich groß.**

§. 323.

Zuſatz.

Ein Cylinder iſt ſo groß als ein Prisma, welches mit jenem gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. Demnach ſind auch zwey Cylinder von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleich groß; auch verhalten ſich zwey Cylinder von gleicher Höhe zu einander, wie ihre Grundflächen.

§. 324.

Zusatz.

Schneidet man die Pyramide (fig. 106.) noch mit der Ebene klm mit der Grundfläche parallel, so hat man klm : abc = $hn^2 : hd^2$ (§. 302.) Ein Prisma über der Grundfläche klm in der Höhe nd ist größer als ein Prisma auf der Grundfläche abc in eben der Höhe nd. Setzt man nun hd = α, dn = x, also hn = $\alpha + x$; klm = γ; abc = β; das Prisma über der Grundfläche γ in der Höhe x = P, und das Prisma über der Grundfläche β in eben der Höhe x = p, so hat man P : p = $\gamma : \beta$; weil aber auch $\gamma : \beta = (\alpha + x)^2 : \alpha^2$ so ist auch P : p = $(\alpha + x)^2 : \alpha^2$. Hieraus folgt nun, P — p : p = $(\alpha + x)^2 - \alpha^2 : \alpha^2$ oder P — p : p = $2ax + x^2 : \alpha^2$, oder P — p : p = $(2\alpha + x)x : \alpha^2$. Weil man nun annehmen kann, daß klm dem Schnitte abc immer näher und näher rucken, folglich x immer kleinere und kleinere Werthe erhalten kann, so ist alsdenn $2\alpha + x$ immer weniger und weniger von 2α unterschieden. Wird demnach x unendlich klein, so nähert sich das Verhältniß P — p : p dem Verhältnisse $2\alpha x : \alpha^2 = 2x : \alpha$ unendlich und der Unterschied beyder Prismen in Vergleichung mit dem kleinsten wird für nichts zu achten seyn; demnach wird er auch in Vergleichung mit dem Pyramidenstücke für nichts gehalten werkönnen d. h. man kann eins von beyden Prismen, welches man will, als das Pyramydenstücke annehmen, ohne daß eben dadurch der Fehler, der begangen wird (da man für das zu bestimmende Pyramidenstück etwas größeres oder kleineres setzt), in einige Betrachtung käme. Gedenkt man sich nun

die Höhe hi in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilet, und durch alle diese Theilungspunkte Ebenen gelegt, so kann man alsdenn jedes Pyramidenstücke zwischen zweyen solchen Ebenen als ein Prisma annehmen, da alsdenn die Summe aller dieser kleinen Prismen die ganze Pyramide ausmacht.

§. 325.

Lehrsatz.

Zwey dreyseitige Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind gleich groß.

Beweis.

Schneidet man beyde Pyramiden (fig. 115.) durch Ebenen in gleichen Höhen mit den Grundflächen parallel, so hat man $gp^2 : go^2 = abc : def$ also $def = \frac{go^2 . abc}{gp^2}$; und $rq^2 : rn^2 = hsi : klm$, mithin $klm = \frac{rn^2 . hsi}{rq^2}$. Weil nun nach der Voraussetzung $abc = hsi$, $gp = rq$ und $op = nq$ also auch $go = rn$, so ist auch $def = klm$. Theilt man nun die Höhen in unendlich kleine Theile, und legt durch alle diese Theilungspunkte Ebenen mit den Grundflächen parallel, so sind jede beyde Pyramidenstücke in gleichen Höhen von den Grundflächen gleich groß (§. 322. 324.), mithin die Summe von Pyramidenstücken der einen Pyramide gleich der Summe von Pyramidenstücken der andern Pyramide, folglich sind sie beyde gleich groß.

§. 326.

Lehrsatz.

Ein Prisma ist dreymal größer als eine Pyramide auf eben so großer Grundfläche in gleicher Höhe.

Beweis.

Es sey (fig. 116.) abcdef zuerst ein dreyseitiges Prisma. In den Seitenflächen fedc und abcd ziehe man die Diagonallinien fd und bd, so schneidet die Ebene bdf eine Pyramide bcdf mit dem Prisma auf gleicher Grundfläche bfc und gleicher Höhe. Ferner ziehe man in der Seitenfläche abfe die Diagonale fe, so schneidet das Dreyeck afd noch eine Pyramide afed auf eben so großer Grundfläche aed in gleicher Höhe; also sind die Pyramiden bcdf und afed gleich. Der noch übrige Körper abfde ist ebenfals eine Pyramide, deßen Grundfläche abf, und deßen Höhe ad. Nimmt man ferner in der Pyramide afde die Fläche afe zur Grundfläche an, so ist ebenfals die Höhe derselben ad, also ist die Pyramide abfde = afde = bdfc, und das ganze Prisma = 3afde. Mit einem dreyseitigen Prisma hat nun jedes andere Prisma auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe gleich großen körperlichen Inhalt, also ist der Satz allgemein.

§. 327.

Zusatz.

Pyramiden sind demnach gleich groß, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind, denn sie sind die dritten Theile von gleichen Prismen; auch verhalten

halten sich zwey gleich hohe Pyramiden zu einander wie ihre Grundflächen.

§. 328.

Zusatz.

Ein Kegel ist so groß als eine Pyramide, welche mit jenem gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat; demnach sind auch zwey Kegel von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleich groß; auch verhalten sich zwey gleich hohe Kegel zu einander, wie ihre verschiednen Grundflächen. (§. 311. 327.)

§. 329.

Zusatz.

Ein Kegel ist $\frac{1}{3}$ von einem Cylinder, welcher auf einer eben so großen Grundfläche in gleicher Höhe steht (§. 323.)

§. 330.

Lehrsatz.

Pyramiden und Cylinder, Pyramiden und Kegel, welche gleiche Grnndflächen haben, verhalten sich zu einander, wie ihre verschiedenen Höhen.

Beweis.

Wenn ab und cd (fig. 117.) zwey rechtwinklichte Parallellepipeda, welche auf gleichen und ähnlichen Grundflächen stehen, so sind die Seitenlinien ae und cg, ef und gh gleich groß. Nimmt man die Seitenflächen eb und gd zu Grundflächen an, so haben beyde Parallellepipeda gleiche Höhen, also hat man

ab

ab : cd = eb : gd, aber.
eb : gd = fb : hd, mithin
ab : cd = fb : hd.

Weil nun alle Prismen und Cylinder gleich groß, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, und Pyramiden und Kegel den dritten Theil von eben so hohen Prismen oder Cylindern auf eben so großen Grundflächen ausmachen, so gilt dieser Satz für Prismen und Cylinder, Pyramiden und Kegel.

§. 331.

Lehrsatz.

Das Verhältniß der Prismen und Cylinder, Pyramiden und Kegel ist zusammengesetzt aus den Verhältnißen der Grundflächen und Höhen.

Beweis.

Wenn wiederum (fig. 118.) ab und cd zwey Parallelepipeda sind, so kann man mit diesem ein drittes ef vergleichen, deßen Höhe gleich der Höhe des erstern, und deßen Grundfläche gleich der Grundfläche des andern. Nun hat man ab : ef = ag : em (§. 318.) und

ef : cd = mf : id (§. 329.) also hat man

$$ab : cd = \begin{cases} ag : em \\ mf : id \end{cases} \text{ oder}$$

$$ab : cd = \begin{cases} ag : ci \\ gb : id \end{cases}$$

Daß aber dieser Satz für alle Prismen, Cylinder, Pyramiden und Kegel gelte, erhellet aus dem vorigen §.

§. 332.

Zusatz.

Aus der Proportion ab : cd = { ag : ci / gb : id } hat man ab : cd = ag. gb : ci. id d. h. Prismen und Cylinder, Pyramiden und Kegel verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Grundflächen in die Höhen. Soll nun ab = cd seyn, so ist auch ag. gb = ci. id, und man hat ag : ci = id : gb (§. 176. Arithm.) d. h., die Grundflächen zweyer gleich großen Prismen, Cylinder, Pyramiden und Kegel verhalten sich umgekehrt wie ihre Höhen.

§. 333.

Zusatz.

Das Verhältniß zweyer Würfel ist dreymal grösser als das Verhältniß ihrer Seitenlinien.

Drittes Kapitel.

Von der Berechnung des körperlichen Inhalts und der Oberflächen der Prismen, Cylinder, Pyramiden und Kegel.

§. 334.

Erklärung.

Wenn die Seitenlinie eines Würfels so lang als eins von dem im §. 154. angegebenen Längenmaasse z. E. eine Ruthe, ein Zoll, eine Linie u. s. so heißt der Würfel eine **Cubikruthe**, ein **Cubikfuß**, **Cubikzoll**, eine **Cubiklinie** u. s..

§. 335.

§. 335.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Prismen, Cylinders, einer Pyramide und eines Kegels im Cubikmaasse zu finden, wenn die Grundflächen im Quadratmaasse, und die Höhen im Längenmaasse gegeben sind.

Auflösung.

Sollte die Zahl, welche den Quadratinhalt der Grundflächen angiebt, mit der Zahl, welche die Höhen ausdrückt, nicht gleichnahmigt seyn, so bringe man sie auf einerley Nahmen, und multiplicire alsdenn die Grundfläche mit der Höhe, das Produkt giebt den körperlichen Inhalt eines Prismen und Cylinders im Cubikmaasse eben des Nahmens an. Wäre der Körper eine Pyramide oder ein Kegel, so müßte man von diesem Produkte den dritten Theil nehmen (§. 325. 328.).

Beweis.

Es sey (fig. 119.) p ein Prisma oder Cylinder, deßen Grundfläche a und deßen Höhe = b; c aber ein Würfel deßen Seitenlinie = l, so hat man p : c = ab : l^2. l^1 (§. 330. 332.). Weil hier aber l = 1 angenommen wird, so ist p : c = ab : 1, und es ist der Würfel c im Prisma oder Cylinder so vielmal enthalten, als das Produkt ab Eins enthält. Für Pyramiden und Kegel erhellet die Richtigkeit aus dem §. 330.

§. 336.

Zusatz.

Den körperlichen Inhalt eines Würfels im Cubikmaasse findet man, wenn die Zahl, welche die Länge

ge der Seitenlinien im Längenmaasse angiebt, in den Cubum erhebet.

§. 337.

Zusatz.

Ist die Seitenlinie eines Würfels = 10^{I}, so hält eine Cubikruthe $1000\,C.^{I}$, ein Cubikfuß $1000\,C.^{II}$ u. s. so daß ein jedes größere Cubikmaas 1000 Cubikmaasse des nächstkleinern Nahmens enthält. Gebraucht man aber Duodecimalmaas, so hält eine Cubikruthe 1728 Cubikfuß ein Cubikfuß 1728 Cubikzoll u. s. und so faßet ebenfals jedes größere Cubikmaas 1728 Cubikmaasse des nächstkleinern Nahmens. Uebrigens nennt man jenes das Decimalcubik- und dieses das Duodecimalcubikmaas.

§. 338.

Zusatz.

Das Decimalcubikmaas auf Duodecimalcubikmaas und umgekehrt dieses auf jenes zu bringen, geschiehet vermittelst der Regel Detri. Wird vorausgesetzet, daß 10^{I} Decimalmaas = 12^{I} Duodecimalmaas, so sind auch 1000 Decimalcubikfuß = 1728 Duodecimalcubikfuß. Will man nun z. E. wißen, wie viel $24C^{I}\ 68C^{II}$ Decimalmaas nach Duodecimalmaas betragen, so ist der Ansatz

1000 : $24C^{I}\ 68C^{II}$ = 1728 oder
1000000 : 24068C^{II} = 1728 oder
15625 : 6017 = 108

108

48136
6017

649836

649836 | 41,589 C^1 Duodec. Maas
15625
62500
24836
15625
92110
78125
139850
124940
149100 u. f.

§. 339.

Erklärung.

Wenn eine Ebene eine Pyramide ehgf (fig. 106.) oder einen Kegel acd (fig. 108.) mit der Grundfläche parallel schneidet, so heißen die zwischen den Grundflächen und den schneidenden Ebenen sich befindlichen Stücke eacbfg und cgkd eine abgekürzte Pyramide und ein abgekürzter Kegel. Im Fall der Kegel gerade, ist die Axe des abgekürzten Kegels zugleich seine Höhe.

§. 340.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer abgekürzten Pyramide und eines abgekürzten geraden Kegels zu finden.

Auflösung.

Man setze (fig. 120.) abc = γ; dfe = β; hg = α und ih = x also ig = $\alpha + x$, und es ist der Inhalt der abgekürzten Pyramide adfecb = $\frac{1}{3}$ (α + x)

$+x)\ \gamma - \frac{1}{3} x\beta$ (§. 334.). Könnte man aber die Höhe hi nicht meßen, so kann man doch wenigstens die Höhe hg der abgekürzten Pyramide meßen, und es läßt sich alsdenn ~~folgender~~ der Maaßen die abgekürzte Pyramide finden: man hat nemlich $\gamma : \beta = (\alpha+x)^2 : x^2$, und $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{(\alpha+x)^2}{x^2}$, also $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{a+x}{x}$, und

$$x\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} = \alpha + x;\ x\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} - x = \alpha \text{ oder } x\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} - 1\right)$$

$$= \alpha, \text{ mithin } x = \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} - 1} = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}}.$$ Setzt man nun in der Formel $\frac{1}{3}(\alpha+x)\gamma - \frac{1}{3}x\beta$ statt x diesen gefundenen Werth, so erhält man $\frac{1}{3}(\alpha +$

$$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}}\Big)\gamma - \frac{1}{3}\frac{\alpha\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}} =$$

$$\frac{1}{3}\alpha\left(\frac{\gamma(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta})+\gamma\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}}\right).$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner des gebrochenen Faktors durch $\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta}$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{3}\alpha\left(\frac{\gamma^2-\beta^2+\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma}-\beta\sqrt{\gamma}\sqrt{\beta}}{\gamma-\beta}\right) = \frac{1}{3}\alpha(\gamma+\beta$$

$$+\sqrt{\beta\gamma})$$

d. h. man multiplicire beyde Flächen γ und β in einander ziehe aus diesem Produkte die Quadtwurzel, addire sie zur Summe von γ und β, und multiplicire alles durch den dritten Theil der Höhe der abgekürzten Pyramide.

In dem abgekürzten geraden Kegel (fig. 120.) sey ac, eg und gc bekannt. Läßt man nun aus dem Punkte e die senkrechte Linie ef auf die Grund-

fläche

fläche herab, so ist ef = gc und mit gc parallel, und man hat: af : fe = ac : ch oder ac — eg : cg = ac : ch. Vermittelst dieser Proportion kann man also ch finden, und daraus gh = ch — cg. Darauf suche man den Inhalt des ganzen Kegels ahb und des kleinern ehd, subtrahire diesen letzten von dem erstern, die Differenz ist der Inhalt des abgekürzten Kegels.

§. 341.

Aufgabe.

Die Seitenflächen eines Prismen im Quadratmaas zu finden.

Auflösung.

Weil die Seitenflächen eines Prismen Parallellogrammen sind, so meße man von jedem so viel, daß man deßen Quadratinhalt finden kann; hiernächst berechne man eine jede Seitenfläche für sich, und addire sie zusammen, die Summe ist der Quadratinhalt der Seitenflächen.

§. 342.

Zusatz.

Die Cylinderfläche eines geraden Cylinders ist einem Rechtecke gleich, deßen Grundlinine der Peripherie der Grundfläche und deßen Höhe der Axe des Cylinders gleich ist (§. 323.). Bedeutet also der Halbmeßer der Grundfläche des Cylinders = r, und die Axe = a, so ist die Peripherie der Grundfläche = $2\pi r$ (§. 242.), also die Cylinderfläche = $2\pi ra$.

§. 343.

Zusatz.

Es sey der Halbmeßer der Grundfläche eines andern eben so hohen geraden Cylinders = R, so ist aus eben dem Grunde die Cylinderfläche = $2\pi Ra$; demnach verhalten sich gleich hoher Cylinderflächen = $2\pi ra : 2\pi Ra$ oder wie r : R. d. h. wie die halben folglich auch wie die ganzen Durchmeßer ihrer Grundflächen.

§. 344.

Aufgabe.

Die Seitenflächen einer Pyramide auszurechnen.

Auflösung.

Weil die Seitenflächen einer Pyramide Dreyecke sind, so meße man von jedem Dreyecke so viel, daß sich der Quadratinhalt finden laße; alsdenn berechne man jedes Dreyeck einzeln, und addire aller Inhalt zusammen, die Summe ist der Flächeninhalt der Seitenflächen.

§. 345.

Zusatz.

Man nehme die Seitenlinien (fig. 121.) ab' bd, de, u. f. der Grundfläche der Pyramide als die Grundlinien der Seitenflächen derselben an, so sind die Höhen der Dryecke acb, bcd u. f. die senkrechten Linien, die aus der Spitze c auf die Seitenlinien ab, bd u. f. gezogen werden. Sind diese Höhen einander gleich, so sind alsdenn die Seitenflächen der Pyramide gegen die Grundfläche unter gleichen Winkeln

keln geneigt. Zieht man nehmlich aus der Spitze c die Linie cg auf die Grundfläche senkrecht, so sind die Dreyecke chg, cig u. s. alle gleich groß, also auch die Winkel chg, cig u. s. als die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche der Pyramide gleich groß. Beschreibt man alsdenn mit dem Halbmeßer hg einen Kreis, so wird dieser alle Seitenlinien der Grundfläche berühren. Werden daher diese Seitenlinien als unendlich klein angenommen, so fließen sie alle in der Peripherie eines Kreises zusammen, und die Pyramide wird ein gerader Kegel, deßen Kegelfläche also $\frac{2\pi rch}{2} = \pi rch$ d. h. die gerade Kegelfläche ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie so groß als die Peripherie der Grundfläche und deßen Höhe der Seitenlinie des Kegels gleich ist.

§. 346.

Zusatz.

Die Grundfläche des Kegels ist $= \pi r^2$, also verhält sich die Kegelfläche des geraden Kegels zur Grundfläche $= \pi rch : \pi r^2$ oder $= ch : r$ d. h. wie die Seite des Kegels zum Halbmeßer der Grundfläche.

§. 347.

Zusatz.

Die Fläche des ganzen Kegels (fig. 120.) ahb ist $=$ πac. ah und die Fläche des kleinern Kegels edh $=$ πeg. eh, also die Fläche des abgekürzten geraden Kegels aedb $=$ π (ac. ah — eg. eh). Ferner ist ac — eg : ae $=$ ac : ah und ac — eg : ae $=$ eg : eh,

eh, mithin $ah = \frac{ae.\ ac}{ac - eg}$ und $eh = \frac{ae.\ eg}{ac - eg}$; das giebt die abgekürzte Kegelfläche $aedb = \pi\ (ac.\ \frac{ae\ ac}{ac - eg} - eg.\ \frac{ae.\ eg}{ac - eg}) = \pi \left(\frac{ac^2.\ ae - eg^2.\ ae}{ac - eg} \right)$

$= \pi \frac{ae}{ac - eg} (ac^2 - eg^2)$. Nun ist $ac^2 - eg^2$ $= (ac - eg)(ac + eg)$, (§. 52. 2. Fall. Arithm.) also die abgekürzte Kegelfläche $= \pi ae\ (ac + eg)$.

Viertes Kapitel.

Von der Kugel.

§. 348.

Erklärung.

Wenn ein körperlicher Raum von einer krummen Fläche also eingeschloßen wird, daß alle ihre Punkte von einem Punkte, der innerhalb des körperlichen Raums befindlich, gleich weit entfernet sind, so heißt ein solcher körperlicher Raum eine **Kugel**, die krumme Oberfläche die **Kugelfläche**, der Punkt innerhalb der Kugel, von welchem alle Punkte der Kugelfläche gleich weit entfernt sind der **Mittelpunkt** der Kugel, und die geraden Linien, welche aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Kugelfläche gezogen werden, die **Halbmeßer** der Kugel. Alle Halbmeßer einer Kugel sind demnach gleich groß.

§. 349.

Lehrsatz.

Wenn eine Ebene die Kugel aber nicht durch den Mittelpunkt schneidet, und von dem Mittelpunkte eine

Linie senkrecht auf die schneidende Ebene gezogen wird, so muß der Punkt, welcher diese Ebene trift, innerhalb der Kugel sich befinden.

Beweis.

Weil die Ebene (fig. 122.) ab die Kugel schneiden soll, so muß ein Theil innerhalb der Kugel fallen. Eine jede gerade Linie aber aus dem Mittelpunkte der Kugel auf diesen Theil gezogen muß kleiner als der Halbmeßer seyn. Unter allen geraden Linien aber ist diejenige die kürzeste, welche aus dem Mittelpunkte c auf diesen Theil senkrecht gezogen wird, also muß sie unter denjenigen befindlich seyn, welche die Ebene ab innerhalb der Kugel treffen.

§. 350.

Lehrsatz.

Wenn eine Ebene eine Kugel schneidet, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, deßen Mittelpunkt da ist, wo eine gerade Linie aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Durchschnittsfigur senkrecht gezogen wird.

Beweis.

Es sey die Ebene, welche die Kugel schneidet, ab und cd senkrecht auf diese Ebene gezogen, so muß d innerhalb der Kugel sich befinden. Nun nehme man einen Punkt e in dem Umfange der Durchschnittsfigur an, wo man will, und ziehe de und ec, so ist $cde = R$, also $ce^2 - cd^2 = de^2$ und $\sqrt{(ce^2 - cd^2)} = de$. Nun bleiben ce und cd von einerley Größe, man mag den Punkt in der Durchschnittsfigur annehmen wo man will, also muß auch de immer gleich

groß bleiben, und es ist so ein Kreis, deßen Mittelpunkt d ist.

§. 351.

Zusatz.

Ein Schnitt der Kugel, welcher dem Mittelpunkte näher liegt, giebt einem größeren Kreis, als der entferntere. Zwey Schnitte also, welche von dem Mittelpunkte der Kugel gleich weit entfernet sind, geben gleich große Kreise.

§. 352.

Zusatz.

Ein Schnitt durch der Kugel Mittelpunkt giebt auf der Oberfläche der Kugel den größten Kreis. Aus diesem Grunde heißen die Ebenen der Kreise, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, größte Kreise, und die übrigen kleinere. Demnach muß auch umgekehrt die Ebene eines größten Kreises durch der Kugel Mittelpunkt gehen, weil es sonst auf einerley Kugel noch größere Kreise geben müßte.

§. 353.

Zusatz.

Zwey Schnitte einer Kugel, welche gleich große Kreise geben, sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

§. 354.

Zusatz.

Eine gerade Linie ab (fig. 123.) schneidet die Kugelfläche in nicht mehrern als zweyen Punkten.

Denn

Denn man lege durch zwey Punkte, in welchen die gerade Linie dieselbe trift, und durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene, so sind alle Punkte der geraden Linien in dieser Ebene, und alle Punkte der Oberfläche der Kugel liegen auf dieser Ebene in einem Kreise (§. 350.). Sollte nun die gerade Linie die Kugelfläche in dreyen Punkten schneiden, so müßte die Peripherie dieses Kreises die gerade Linie in dreyen Punkten treffen, welches unmöglich ist.

§. 355.

Zusatz.

Die Peripherien zweyer Kreise auf der Oberfläche der Kugel können einander nur in zweyen Punkten schneiden (§. 23.)

§. 356.

Zusatz.

Ein Halbmeßer der Kugel auf den Mittelpunkt eines kleinern Kreises der Kugel gezogen steht auf der Ebene desselben senkrecht; auch geht eine gerade Linie auf den Mittelpunkt eines kleinern Kreises der Kugel senkrecht gesetzt durch der Kugel Mittelpunkt.

§. 357.

Erklärung.

Eine gerade Linie durch den Mittelpunkt einer Kugel zu beyden Seiten bis an die Oberfläche der Kugel gezogen heißt ein **Durchmeßer der Kugel** (diameter sphaerae).

§. 358.

Zusatz.

Alle Durchmeßer einer Kugel sind gleich groß; denn jeder Durchmeßer ist doppelt so groß als ihr Halbmeßer.

§. 359.

Zusatz.

Größte Kreise schneiden einander in einem gemeinschaftlichen Durchmeßer, und theilen daher einander in zwey gleiche Halbkreise.

§. 360.

Zusatz.

Ein Durchmeßer der Kugel, der durch den Mittelpunkt eines kleinern Kreises gehet, steht auf der Ebene desselben senkrecht; auch ist eine gerade Linie durch den Mittelpunkt eines kleinern Kreises senkrecht gezogen ein Durchmeßer der Kugel.

§. 361.

Erklärung.

Ein Durchmeßer (fig. 124.) ab einer Kugel, welcher auf der Ebene eines Kugelschnittes de senkrecht ist, also durch desselben Mittelpunkt geht, heißt eine Axe der Kugel, welche zu diesem Kugelschnitt gehöret.

§. 362.

Zusatz.

Schneidet man die Kugel mit mehreren Ebenen, welche alle mit der Ebene de des Kugelschnittes paral-

parallel laufen, so steht die Axe ab auf allen diesen sogenannten Parallelkreisen senkrecht, und geht durch derselben Mittelpunkten.

§. 363.

Erklärung.

Die Endpunkte a und b der Axe ab nennt man die Pole eines jeden der Parallelkreise, welche zur Axe ab gehören.

§. 364.

Zusatz.

Drehet sich die Kugel um die Axe ab, so beschreibt alsdenn ein jeder Punkt wie g auf der Oberfläche Kugel einen zur Axe ab gehörigen Parallelkreis.

§. 365.

Erklärung.

Wenn sich zwey größte Kreise (fig. 125.) bfa und efd auf der Oberfläche einer Kugel in dem Punkte f schneiden, so nennt man den Winkel afe einen sphärischen Winkel. Dieser Winkel ist so groß als der Neigungswinkel der Ebenen beyder größten Kreise gegen einander. Schneidet noch ein anderer größter Kreis adbe die vorigen beyden Kreise der Kugel in den Punkten a und e, so schließen alsdenn die Bogen ae, ef und af als Seitenlinien ein sogenanntes sphärisches Dreyeck ein.

§. 366.

Erklärung.

Eine Ebene berührt die Oberfläche der Kugel, wenn sie mit dieser zusammenfält, sonst aber ganz ausserhalb der Kugel liegt.

§. 367.

§. 367.

Zusatz.

Eine Ebene de (fig. 126.) kann die Kugel nur in einem einzigen Punkte a berühren. Denn sollte sie die Kugelfläche noch in dem Punkte b berühren, so kann man doch die gerade Linie ab ziehen. Schneidet nun eine Ebene die Kugel durch den Mittelpunkt, in welcher die beyden Punkte a und b sich befinden, so ist ab die Sehne eines größten Kreises der Kugel, also liegt sie ganz innerhalb der Kugel. Nun müßte aber auch ab in der Ebene liegen, welche die Kugel berühren soll, also würde ein Stück von ihr innerhalb der Kugel fallen, und folglich keine Berührungsebene seyn.

§. 368.

Lehrsatz.

Eine Ebene de auf dem Endpunkte des Halbmeßers ca senkrecht gesetzt berührt die Kugel:

Auch umgekehrt, wenn eine Ebene de die Kugel berühret, so steht ein Halbmeßer der Kugel auf den Berührungspunkt gezogen auf derselben senkrecht.

Beweis.

Die kürzeste Linie, welche von dem Mittelpunkte auf die Ebene de gezogen werden kann, ist ca, also ist sie die Entfernung des Mittelpunktes von der Ebene de. Eine jede andere gerade Linie aus dem Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene de gezogen muß demnach größer als der Halbmeßer seyn, und folglich jeder Punkt der Ebene ausserhalb der Kugel sich befinden.

Ist

Ist a der Berührungspunkt, so ist die Linie ac die kürzeste von allen geraden Linien, welche von der Ebene in dem Mittelpunkt der Kugel gezogen werden können, also steht sie auf der Ebene senkrecht.

§. 369.

Zusatz.

Eine gerade Linie auf den Berührungspunkt der Ebene senkrecht gezogen, muß durch den Mittelpunkt der Kugel gehen und umgekehrt: eine gerade Linie aus dem Mittelpunkte auf den Berührungspunkt gezogen muß auf der Berührungsebene senkrecht stehen.

§. 370.

Aufgabe.

Es sey (fig. 127.) kgb ein Stück von einer Kreisfläche, und diese beschreibe um die unbewegliche Axe gb ein Kugelstück, man soll aus der Gleichung der Kreislinie die krumme Oberfläche dieses Kugelstückes finden.

Auflösung.

Wenn der Bogen gk um das unbestimmte Stück kef zunimmt, so ziehe man fc und kb, und kh mit gc parallel. Ferner ziehe man durch die Punkte f und k die gerade Linie fa, welche die verlängerte Axe ge in dem Punkte a schneidet. Drehet sich nun diese Figur um die unbewegliche Axe ac, so beschreiben die geraden Linien ak und af gerade Kegel, und das Stück kf einen abgekürzten geraden Kegel, der Bogen gk ein Stück von einer Kugelfläche, wozu noch ein Stück kömmt, das von dem Bo-

gen

gen kef beschrieben wird. Dieses letzte Stück ist nun der Zuwachs oder die Differenz der Fläche, welche gk beschreibet. Es sey also diese Oberfläche = S, so ist der Zuwachs derselben = ΔS. Die Oberfläche des geraden Kegels, welcher zur Seitenlinie ak hat, ist = π. ak. bk, und die, welche zur Seitenlinie af hat, = π. af. fc., mithin die abgekürzte gerade Kegelfläche = π. af. fc. — πak. kb. Nun ist af = ak + kf, und fc = hc + fh = kb + hf, mithin π. af. fc — π. ak. bk = π(ak + kf)(kb + hf) — πak. kb = π. ak. hf + πkf. kb + π. kf. hf + π. ak. kb — πak. kb = π. ak. hf + π. kf. kb + π. kf. hf.

Nun setze man gb = x, bk = y, mithin bc = kh = Δx, und hf = Δy; weil ferner das Dreyeck akb ∽ kfh, so hat man fh : kb = kf : ak, oder Δy : y = kf : ak, also $ak = \frac{kf.\ y.}{\Delta y}$, aber $kf = \sqrt{(fh^2 + kh^2)}$ $= \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$, mithin $ak = \frac{y\sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}.}{\Delta y}$

Setzt man diese Werthe in dem Ausdrucke der abgekürzten Kegelfläche, so wird

$$\pi.\ ak.\ hf = \pi \Delta y \frac{y\sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}}{\Delta y}$$

$$= \pi\, y \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}.$$

$$\pi.\ fk.\ kb = \pi y \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

$$\pi.\ kf.\ hf = \pi \Delta y \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$$

Also die gerade abgekürzte Kegelfläche = $2\pi y \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)} + \pi \Delta y \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$. Je kleiner nun der Bogen kef angenommen wird, desto mehr nähert sich der Bogen kef der geraden Linie kf, desto kleiner wird also auch der Ausdruck $\pi \Delta y \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$;

Δx^2); wird endlich der Bogen unendlich klein oder verschwindet, so wird auch $\pi \Delta y \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)} = 0$, und es ist die Gränze $dS = 2\pi y \sqrt{(dy^2 + dy^2)}$. Sucht man also aus der gegebenen Gleichung der Kreislinie dieselbe so zu verändern, daß sie $= 2\pi y \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ wird, so kann man alsdenn integriren, und das Integral ist die Oberfläche des Kugelstücks. Es ist nemlich

$y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ also $y^2 = 2rx - x^2$ (§. 238.)

Demnach hat man $2ydy = 2rdx - 2xdx$ oder

$$ydy = (r - x)\,dx \text{ also}$$

$$dy = \frac{(r-x)\,dx}{y} = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}},$$

$$dy^2 = \frac{(r-x)^2\,dx^2}{2rx - x^2} \text{ und}$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{(r-x)^2\,dx^2}{2rx - x^2} + dx^2 \text{ oder}$$

$$dy^2 + dx^2 = \left(\frac{(r-x)^2}{2rx - x^2} + 1\right)dx^2 \text{ oder}$$

$$dy^2 + dx^2 = \left(\frac{r^2 - 2rx + x^2 + 2rx - x^2}{2rx - x^2}\right) dx^2 \text{ oder}$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{r^2\,dx^2}{2rx - x^2} \text{ mithin}$$

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}.$$

$$2\pi y \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = 2\pi y \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= 2\pi r dx$$

Integriret man nun, so findet man die Oberfläche des Kugelstückes $= 2\pi rx$.

§. 371.

Zusatz.

Ist $x = 2r$, so wird die ganze Kugelfläche $= 4r^2\pi$. Der größte Kreis einer Kugel, deßen Halbmeßer $= r$, ist $= \pi r^2$ (§. 245.), mithin verhält sich die Oberfläche einer Kugel zur Fläche des größten Kreises $= 4r^2\pi : \pi r^2$ oder $= 4 : 1$ d. h. die Oberfläche der Kugel ist viermal größer als die Fläche des größten Kreises.

§. 372.

Zusatz.

Wenn die Grundfläche eines geraden Cylinders dem größten Kreise und die Höhe deßelben dem Durchmeßer der Kugel gleich ist, so ist die Cylinderfläche so groß als die Kugelfläche. Denn es ist die Peripherie der Grundfläche des Cylinders $= 2\pi r$, und die Höhe $2r$, mithin die Cylinderfläche $= 4\pi r^2$.

§. 373.

Aufgabe.

Es ist wie im §. 370. die Gleichung für die Kreislinie gegeben, man soll das von der Fläche gkb beschriebene Kugelstück finden.

Auflösung.

Der Inhalt des geraden Kegels, welcher von dem Dreyeck abk beschrieben wird, ist $= \frac{\pi}{3}. bk^2. ab$, und der Inhalt des von dem Dreyeck afc beschriebenen Kegels $= \frac{\pi}{3}. cf^2. ac$ (§. 335.), also der Inhalt des von kf beschriebenen abgekürzten Kegels $= \frac{\pi}{3}(cf^2. ac - bk^2. ab)$. Nun ist $cf = hc + hf$:

$y + \Delta y$,

$y + \Delta y$, also $cf^2 = (y + \Delta y)^2 = y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$ (§. 130. Arithm.); $bk = y$, und $bk^2 = y^2$; überdem hat man $hf : hk = kb : ab$ oder $\Delta y : \Delta x = y : ab$, mithin $ab = y\frac{\Delta x}{\Delta y}$, und $ac = ab + bc = y.\frac{\Delta x}{\Delta y} + \Delta x$. Demnach wird der Inhalt des abgekürzten geraden Kegels $\frac{\pi}{3}(cf.^2 ac - bk^2.ab) = \frac{\pi}{3}\left((y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2)(y\frac{\Delta x}{\Delta y} + \Delta x) - y^2.y\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = \frac{\pi}{3}\left(y^3\frac{\Delta x}{\Delta y} + 3y^2\Delta x + 3y\Delta x\Delta y + \Delta x\Delta y^2 - y^3\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = \pi y^2\Delta x + \pi y\Delta x\Delta y + \frac{1}{3}\pi\Delta x\Delta y^2$. Das kleine Kugelstück, das von dem Abschnitte kef beschrieben wird, benenne man mit Q, so ist der Zuwachs oder die Differenz, welche das Kugelstück von der Ebene gkb beschrieben erhält, $= \pi y^2\Delta x + \pi y\Delta x\Delta y + \frac{1}{3}\pi\Delta x\Delta y^2 + Q$. Bezeichnet man nun dieses Kugelstücke mit S, so ist $\Delta S = \pi y^2\Delta x + \pi y\Delta x\Delta y + \frac{1}{3}\pi\Delta x\Delta y^2 + Q$, mithin $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \pi y^2 + \pi y\Delta y + \frac{1}{3}\pi\Delta y^2 + \frac{Q}{\Delta x}$; verschwindet Δx und hiermit Δy, so ist die Gränze des Verhältnißes $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ oder $\frac{dS}{dx} = \pi y^2$ (§. 280. 281. Arithm.), mithin $dS = \pi y^2 dx$. Sucht man demnach die gegebene Gleichung für die Kreislinie so zu verändern, daß sie $= \pi y^2 dx$ wird, so kann man alsdenn integriren, und das Integral ist der körperliche Inhalt des Kugelstückes,

das von der Ebene dgk beschrieben wird. Es ist nemlich $y^2 = 2rx - x^2$, also

$$\pi y^2 dx = 2r\pi x dx - \pi x^2 dx^2 = dS.$$

und das Integral davon

$$S = r\pi x^2 - \frac{\pi x^3}{3}.$$

§. 374.

Zusatz.

Wird $x = 2r$, so wird der körperliche Inhalt der ganzen Kugel $= 4r^2\pi - \frac{8}{3}\pi r^3 = \frac{12}{3}\pi r^3 - \frac{8}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Wäre der ganze Durchmeßer $= d$ der Kugel gegeben, so ist $\frac{1}{2} d = r$, also $\frac{1}{8} d^3 = r^3$ und $\frac{4}{24} d^3 = \frac{1}{6} d^3 = \frac{4}{3} r^3$, und der Inhalt der Kugel $= \frac{1}{6}\pi d^3$.

§. 375.

Zusatz.

Man setze $f = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6} d^3\pi$, so hat man

$$f : r^3 = \frac{4}{3}\pi : 1 \text{ und}$$
$$f : d^3 : \frac{1}{6}\pi : 1 \text{ d. h.}$$

die Kugel verhält sich zum Würfel des Halbmeßers wie $\frac{4}{3}\pi : 1$ oder die Kugel verhält sich zum Würfel des Durchmeßers wie $\frac{1}{6}\pi : 1$, und man findet

$\frac{4}{3}\pi = 4,188790204786\,39$ — — und
$\frac{1}{6}\pi = 0,523598775598298873$ — —

§. 376.

Zusatz.

Es sey der Durchmeßer einer andern Kugel $S = D$, und der Halbmeßer $= R$, so ist $S = \frac{1}{6}\pi D^3$

und

und $S = \frac{4}{3}\pi R^3$, mithin hat man $f : S = d^3 : D^3$ oder $f : S = r^3 : R^3$ oder die erste Kugel verhält sich zur zweyten, wie die Würfel der Durch- oder Halbmeßer.

§. 377.

Zusatz.

Wäre der Inhalt einer Kugel $= f$ im Cubikmaas gegeben, und man wollte den Durchmeßer d haben, so ist $f = \frac{1}{6}\pi d^3$ also $6f = \pi d^3$ und $\frac{1}{\pi} 6f = d^3$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi} 6.f} = d$.

§. 378.

Zusatz.

Der körperliche Inhalt der Kugel $f = \frac{4}{3}\pi r^3$ giebt eben den körperlichen Inhalt $\frac{1}{3}. 4\pi r^3$, und $4\pi r^3$ ist die Oberfläche der Kugel (§. 371.) Eine Pyramide also oder ein Kegel, deren Grundflächen so groß als die Oberfläche der Kugel und deren Höhen dem Halbmeßer der Kugel gleich sind, muß eben so groß als die Kugel seyn.

§. 379.

Zusatz.

Ein Cylinder, deßen Grundfläche dem größten Kreise einer Kugel, und deßen Höhe dem Durchmeßer der Kugel gleich, ist $= 2\pi r^3 = \frac{6}{3}\pi r^3$ und ein Kegel, deßen Grundfläche dem größten Kreise und deßen Höhe dem Durchmeßer der Kugel gleich ist, $= \frac{2}{3}\pi r^3$; also verhält sich die Kugel zum Cylinder $= \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{6}{3}\pi r^3$ oder $= \frac{4}{3} : \frac{6}{3}$ oder $= 4 : 6$ oder $= 2 : 3$,

2 : 3, und die Kugel zum Kegel $= \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3$ oder $= \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$ oder $= 4 : 2$ oder $= 2 : 1$ d. h. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, deßen Grundfläche dem größten Kreise, und deßen Höhe dem Durchmeßer der Kugel gleich, oder die Kugel ist doppelt so groß als ein Kegel, deßen Grundfläche dem größten Kreise und deßen Höhe dem Durchmeßer der Kugel gleich ist.

Anfangsgründe der ebenen Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Von den trigonometrischen Linien und deren Logarithmen.

§. 1

Erklärung.

Wenn ein ebenes Dreyeck von bestimmter Größe verzeichnet werden soll, so ist schon aus der Geometrie bekannt, daß von den sechs Stücken, welche im Dreycke sich befinden, drey bekannt seyn müßen, worunter wenigstens eine Seitenlinie ist. Sind diese drey Stücke durch Zahlen ausgedruckt, so laßen sich die übrigen drey durch Rechnung in Zahlen finden. Diejenige Wissenschaft nun, welche lehret, wie aus drey gegebenen Stücken eines Dreyecks, worunter wenigstens eine Linie seyn muß, die übrigen drey durch Hülfe der Rechenkunst zu finden, heißt die ebene **Trigonometrie** oder schlechthin die **Trigonometrie**.

§. 2.

Erklärung.

Es sey abc (fig. 128.) ein spitzer Winkel, aus deßen Spitze b mit einem willkührlichen Halbmeßer ab ein Kreis beschrieben worden. Läßt man alsdenn aus dem Punkte c des einen Schenkels bc, worinn der Kreisbogen denselben schneidet, eine senkrechte Linie ce auf dem andern Schenkel ab herab, so heißt ce der Sinus (sinus) so wohl des Winkels abc als des Bogens ac, das Stück ae von dem Halbmeßer ab, welches der Sinus ce abschneidet, der Quersinus (sinus versus) des Winkels abc und des Bogens ac. Zieht man ferner durch a die Tangente ad, so wird alsdenn ad die Tangente des Winkels abc und des Bogens ac, und db die Sekante (secans) des Winkels abc und des Bogens ac genennt.

Errichtet man ferner aus dem Mittelpunkte des Kreises b die senkrechte Linie bh, und es wird die Tangente fh so wohl, als auch cg auf bh senkrecht gezogen, so heißt auch cg der Sinus, fh die Tangente bf die Sekante und gh der Quersinus des Winkels cbg und des Bogens ch. Weil aber der Winkel cbg die Ergänzung des gegebenen Winkels cba zu einem rechten Winkel ist, so erhalten die Linien cg, fh, fb und gh auch die Nahmen Cosinus, Cotangente, Cosekante, Cosinus versus des Winkels abc und des Bogens ac.

Bedeutet also z einen Winkel oder Kreisbogen, so werden in der Folge die verkürzten Ausdrücke sin. z, cosi. z, sin. v. z, cos. v. z. tang. z, cota. z, sec. z, cosec.

cosec. z gebrauchet werden, den Sinus, Cosinus, Sinus versus, Cosinus versus, die Tangente, Cotangente, Sekante, Cosekante des Winkels oder Bogens z anzudeuten.

§. 3.

Zusatz.

Weil ecgb allemal ein Rechteck ist, also gb = ec ind gc = eb, so muß eine von den Linien, welche Sinus und Cosinus genennt werden, die andere bestmmen. So wird von dem Sinus ce auf dem Shenkel ab das Stück eb = dem Cosinus und von den Cosinus cg auf dem Schenkel hb das Stück gl = dem Sinus abgeschnitten.

§. 4.

Zusatz.

Wenn der Winkel abc größer wird, so wächst zugleich der Sinus ce, die Tagente ad, die Sekante d, und der Quersinus ae; im Gegentheil nimmt dr Cosinus cg, die Cosekante fb, die Cotangente fh, ud der Cosinus gh ab. Dies erfolget so lange, bs abc ein rechter Winkel oder der Bogen ac ein Quadrant wird; alsdenn wird der Sinus ce, und dr Quersinus ae dem Halbmeßer des Kreises gleich, d Tangente ad aber und die Sekanke bf laufen mt einander parallel, und sind daher unendlich groß, hgegen verschwindet der Cosinus, der Cosinus versu und die Cotangente, die Cosekante aber wird de Halbmeßer gleich. Wird der Winkel abc größerals ein rechter, so nimmt der Sinus, so wie die Tangente oa und die Sekante ob wieder ab,

beyde letztere aber erhalten eine der vorigen entgegengesetzte Lage; hingegen der Sinus versus wird größer als der Halbmeßer, der Cosinus aber, die Cotangente, Cosekante und der Cosinus versus nehmen wieder zu, und der Cosinus und die Cotangente gl und hm bekommen eine den vorigen entgegengesetzte Lage. Wenn daher ec, ad als der Sinus und die Tangente des Winkels abc oder des Bogens ac positiv angenommen werden, so werden die Tangente, Cotangente, Cosinus und Sekante eines stumpfen Winkels negativ. Wächst endlich der Winkel abc zu zweyen rechten Winkeln, so verschwindet die Tangente oa und der Sinus lk, die Sekante aber, der Cosinus und Cosinus versus werden dem Halbmeßer gleich, und der Sinus versus dem Durchmeßer; hingegen die Cosekante und Cotangente unendlich groß.

§. 5.

Zusatz.

Wird der Winkel abc größer als 180° oder rückt der eine Schenkel von i nach n, so wird der Sinus kn wieder größer aber negativ, weil er unter ai fällt, so wie die Tangente ad, welche aber wieder der positiv wird, und die Sekante db, welche auch wieder positiv ist; im Gegentheil nehmen der negative Cosinus bk, die positive Cotangente fh und die Cosekante fb ab; dies erfolget so lange, bis der Winkel dreyen rechten Winkeln gleich wird; alsdann werden der Sinus und die Cosekante dem Halbmeßer gleich, die Tangente aber und Sekante werden unendlich groß, und der Cosinus verschwindet. Wächst

der Winkel über drey rechte Winkel, so nimmt der Sinus wieder ab, bleibt aber negativ, so wie die Tagente, die auch negativ wird; im Gegentheil nimmt der Cosinus eb wieder zu, und wird positiv, auch wächst die Cotangente und Cosekante, beyde aber werden negativ. Dies erfolget nun so lange, bis der Winkel 360° wird, alsdenn verschwindet der Sinus und die Tangente, der Cosinus wird dem Halbmeßer gleich, und die Cotangente und Cosekante werden unendlich groß.

§. 6.

Zusatz.

Bedeutet also Z die halbe Peripherie oder zwey rechte Winkel, so ist sin. $\frac{1}{2}Z = r$, cos. $\frac{1}{2}Z = o$, cotang. $\frac{1}{2}Z = o$ cosec. $\frac{1}{2}Z = r$; hingegen tang. und sec. $\frac{1}{2}Z = \infty$. Ferner ist sin. $Z = o$, tang. $Z = -o$, sec. $Z = -r$, csi. $Z = -r$, cotang. $Z = -\infty$ und cosec. $Z = \infty$. Ferner wird sin. $\frac{3}{2}Z = -r$, tang. und sec. $\frac{3}{2}Z = \infty$, cosi $\frac{2}{2}Z = o$, cotan. $\frac{3}{2}Z = o$; endlich sin. $2Z = o$, tang. $2Z = o$, sec. $2Z = -r$, cotan. $2Z = -\infty$, cosec. $2Z = -\infty$, cosin. $2Z = r$.

§. 7.

Zusatz.

Hieraus ist begreiflich, daß die trigonometrischen Linien eine Aenderung leiden, so bald der dazu gehörige Kreisbogen verändert wird, und daß von der Veränderung des Kreisbogens die Größe der trigonometrischen Linien und umgekehrt die Größe des Bogens von diesen abhangen müße. Demnach sind die

trigonometrischen Linien lauter Funktionen vom Kreisbogen, und der Kreisbogen eine Funktion von den trigonometrischen Linien.

§. 8.

Zusatz.

Der Sinus eines Winkels oder Bogens kann nie größer als der Halbmeßer werden, und heißt deswegens der ganze Sinus (sinus totus). Er ist demnach der Sinus von einem Quadranten oder rechten Winkel. Setzt man daher den ganzen Sinus = 1 (z E. 1 Ruthe, 1 Fuß u. d. g.) so werden alle übrige Sinus ächte Brüche.

§. 9.

Lehrsatz.

Die trigonometrischen Linien zweyer Winkel, welche einander zu 180° ergänzen, sind gleich groß, wenn man den einzigen Quersinus ausnimmt.

Beweis.

Weil (fig. 128.) abc + abl = 180° seyn soll, überdem auch abl + lbi = 180°, so ist auch abc + abl = abl + lbi also abc = lbi. Ferner ist bl = cb, und lkb = ceb = R, mithin ce = kl, und bk = eb, oder gl = gc. Ferner ist hbi = hba, mithin hbi − lbi = hba − cba oder hbm = fbh, bh = bh und bhf = blm = R, also auch hm = hf, mb = bf, und gh = gh. Endlich ist auch das Dreyeck bad = bao, folglich bd = bo, und ad = ao. Der einzige Quersinus ak > ae.

§. 10.

§. 10.

Erklärung.

Wenn acb und $\alpha\beta\gamma$ (fig. 129. 130.) zwey gleich große Winkel, die Bogen ab und $\alpha\beta$ aber mit zwey ungleich großen Halbmeßern ac und $\alpha\gamma$ beschrieben sind, und wenn alsdenn für diese Winkel die den Halbmeßern zugehörigen trigonometrischen Linien verzeichnet werden, so verhalten sich von diesen Linien diejenigen, welche einerley Nahmen haben, wie die dazu gehörigen Halbmeßer.

Beweis.

Es sind die Dreyecke afc und $\alpha\chi\varepsilon$, dcb und $\beta\delta\gamma$, bci und $\beta\gamma\vartheta$, ghc und $\zeta\eta\gamma$ einander ähnlich; demnach hat man bd : $\beta\delta$ = bc : $\beta\gamma$ und bi : $\beta\vartheta$ = bc : $\beta\gamma$ d. h. die Sinus und Cosinus verhalten sich wie die Halbmeßer bc : $\beta\gamma$. Ferner ist fc : $\varepsilon\gamma$ = bc : $\beta\gamma$ und fa : $\varepsilon\alpha$ = bc : $\beta\gamma$ d. h. auch die Sekanten und Tangenten verhalten sich wie die Halbmeßer bc : $\beta\gamma$. Weiter ist gc : $\zeta\gamma$ = bc : $\beta\gamma$ und gh : $\zeta\eta$ = bc : $\beta\gamma$ oder die Cotangenten und Cosekanten verhalten sich wie die Halbmeßer. Ferner ist ac : $\alpha\gamma$ = dc : $\delta\gamma$ und daher ac − dc : $\alpha\gamma$ − $\delta\gamma$ = ac : $\alpha\gamma$ d. h. die Quersinus verhalten sich wie die Halbmeßer; eben so verhalten sich auch die Cosinus versus. Da nun die stumpfen Winkel, die sich mit einem spitzen Winkel zu 180° ergänzen, einerley trigonometrische Linien haben, so gilt dieser Satz auch für stumpfe Winkel. Endlich hat man auch ac : $\alpha\gamma$ = cl : $\gamma\mu$ und daher ac + cl : $\alpha\gamma$ + $\gamma\mu$ = ac : $\alpha\gamma$ oder die Quersinus al und $\alpha\mu$ verhalten sich wie die Halbmeßer ac : $\alpha\gamma$.

§. 11.

§. 11.

Zusatz.

Man setze den Halbmesser $ac = 1$ (etwa eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll u. s.), und den Halbmesser $\alpha\delta = r$, den Sinus $bd = S$, den Cosinus $bi = C$, die Tagente $af = T$, die Sekante $fc = \Sigma$, die Cosekante $gc = \sigma$, und für den Halbmeßer r bezeichne man den Sinus, Cosinus, die Tangente, Sekante, Cosekante mit f, c, t, s und λ, so erhält man $1 : r = S : f$; $1 : r = C : c$; $1 : r = T : t$; $1 : r = \Sigma : s$; $1 : r = \sigma : \lambda$, also $f = rS$; $c = rC$; $t = rT$; $s = r\Sigma$, $\lambda = r\sigma$. Sind demnach die trigonometrischen Linien eines Winkels oder Bogens für den Halbmeßer $= 1$ berechnet worden, so findet man sie leicht für jeden andern Halbmeßer.

§. 12.

Zusatz.

Ist der Sinus des Bogens $bd = z$ für den Halbmeßer $= i$ bekannt, so findet man

1. den Cosinus $cd = \sqrt{(1 - bd^2)}$ oder $\text{cos. } z = \sqrt{(1 - \text{sin. } z^2)}$.

2. Ferner ist $dc : db = ac : af$ oder $\text{cos. } z : \text{sin. } z = 1 : \text{tan : } z$ also $\text{tang. } z = \frac{\text{sin. } z}{\text{cosi. } z}$.

3. Weiter ist $dc : ac = gc : fc$ oder $\text{cos. } z : 1 = 1 : \text{sec. } z$, mithin $\text{sec. } z = \frac{1}{\text{cos. } z}$.

4. Ferner ist $ci : ib = ch : hg$ oder $\text{sin. } z : \text{cos. } z = 1 : \text{cotän. } z$ und $\text{cotan. } z = \frac{\text{cos. } z}{\text{sin. } z}$.

5. Auch

5. Auch hat man ci : ib = cb : cg oder sin. z : 1 = 1 : cosec. z und cosec. $z = \frac{1}{\sin. z}$.

6. Ausserdem ist ad = ac — dc, oder sin. v. z = 1 — col. z.

7. Endlich hi = ch — ic, oder col. v. z = 1 — sin. z.

So bald also für einen Kreisbogen der Sinus und Cosinus bekannt ist, so laßen sich auch die übrigen trigonometrischen Linien leicht finden. Ausserdem hat man auch ac : af = hg : hc oder sin. tot : tang. z = cotang. z. : sin. tot.

§. 13.

Zusatz.

Es sey x = sin. z, mithin x der Sinus des Bogens z. bezeichnet man nun diesen Kreisbogen durch A., so kann der Ausdruck A. sin. x den Bogen des Sinus x bedeuten. Ist daher

x = sin. z, so hat man z = A. sin. x
x = col. z — — z = A. col. x
x = sin. v. z — — z = A. sin. v. x
x = col. v. z — — z = A. col. v. x
x = tang. z — — z = A. tang. x
x = cota. z — — z = A. cota. x
x = sec. z — — z = A. sec x
x = cosec. z — — z = A. cosec. x.

§. 14.

Aufgabe.

Das Differenzial des Sinus eines Kreisbogens durch eine Differenzialfunktion des Kreisbogens, und

das

das Differenzial des Kreisbogens durch eine Differenzialfunktion des Sinus zu finden.

Auflösung.

Es sey (fig. 131.) miba ein Quadrant, der Kreisbogen ab = z. Dieser Kreisbogen ab wachse nun um das unbestimmte Stück ib = Δab = Δz. Nun ziehe man bd, if, bc und be lezztere mit ac parallel, so ist eb = cd = cos. z (§. 3.), gf = bd = sin. z, also gi = if − gf = if − bd = Δbd. Auf das Ende b des Halbmeßers setze man hb senkrecht, und verlängere if bis sie bh in dem Punkte h schneide. Beyde Dreyecke ghb und bec sind einander ähnlich, und man hat bc : be = bh : hg oder 1 : cos. z = bh : hg. Je kleiner nun der Bogen bi = Δz angenommen wird, desto mehr nähert sich hb dem Bogen ib, so wie hg der geraden ig. Setzet man also in der vorigen Proportion die Gränzen der veränderlichen Größen bh und hg oder dz und dsin. z, so hat man 1 : cos. z = dz : dsin. z mithin

$$\text{dsin. } z = dz \cdot \text{cosi. } z.$$

Diese Differenzialfunktion giebt nun auch $dz = \frac{\text{dsin. } z}{\text{cos. } z}$

Setzt man sin. z = x, so ist z = A. sin. x (§. 13.), also d. sin. z = dx und dz = d. A. sin. x; ausserdem ist auch cosin. z = $\sqrt{(1 - \text{sin. } z^2)}$ (§. 12.) = $\sqrt{(1 - x^2)}$, mithin wird d. A. sin. x = $\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

Anmerk. Auf die nemliche Art könnte man die Differrenziale der übrigen trigonometrischen Linien und das Differenzial des Kreisbogens durch Funktionen dieser Linien finden. Wem daran

daran gelegen, der findet sie alle vollständig in meiner höhern Rechenkunst §. 545. S. 423. u. f.

§. 15.

Aufgabe.

Den Kreisbogen z in einer unendlichen Funktion des Sinus zu finden.

Auflösung.

Es ist d. A. $\sin. x = dx \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (§. 14.).

Man verwandele nun $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in eine unendliche Reihe, und man findet

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{2.4} + \frac{3.5x^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7x^8}{2.4.6.8} + \text{u. f. also } dx \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} =$$

$$dx + \frac{x^2 dx}{2.} + \frac{3x^4 dx}{2.4} + \frac{3.5.x^6 dx}{2.4.6} + \frac{3.5.7.x^8 dx}{2.4.6.8}$$

u. f.

Integriret man nun, so erhält man

$$A. \sin. x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{3.4.5} + \frac{3.5x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7x^9}{2.4.6.8.9} \text{ u. f.}$$

§. 16.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Kreisbogen z den Sinus und Cosinus desselben zu finden.

Auflösung.

Wenn man die im vorigen §. gefundene Reihe umkehret, so bekommt man den Sinus des Bogens z durch eine unendliche Funktion des Bogens. Zu dem Ende setze man A. sin. $x = z$, und nehme $x = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 +$ u. s. Von dieser Reihe suche man die Potenzen und setze diese in die Reihe des vorigen §. statt x und den Potenzen von x, und man erhält

$$x^3 = A^3 z^3 + \left.\begin{matrix} 3A^2 B \\ 3AB^2 \end{matrix}\right\} z^7 + \left.\begin{matrix} 3A^2 D \\ 6ACB \\ B^3 \end{matrix}\right\} z^9 + \text{u. s.}$$

$$x^5 = A^5 z^5 + 5A^4 Bz^7 + \left.\begin{matrix} 10A^3 B^2 \\ 5A^4 C \end{matrix}\right\} z^9 + \text{u. s.}$$

$$x^7 = A^7 z^7 + 7A^6 Bz^9 + \text{u. s.}$$

$$x^9 = A^9 z^9 + \text{u. s. mithin}$$

$$\left.\begin{matrix} z \\ +0z^3 \\ +0z^5 \\ +0z^7 \\ +0z^9 \\ \text{u. s.} \end{matrix}\right| = \begin{matrix} Az \\ +\left(B + \frac{A^3}{6}\right) z^3 \\ +\left(C + \frac{3}{6} A^2 B + \frac{31}{40} A^5\right) z^5 \\ +\left(D + \frac{3}{6} A^2 C + \frac{3}{6} AB^2 + \frac{15}{40} A^4 B + \frac{15}{336} A^7\right) z^7 \\ +\left(E + \frac{3}{6} A^2 D + ACB + \frac{2}{6} B^3 + \frac{30}{40} A^3 B^2 + \frac{15}{40} A^4 C + \frac{105}{336} A^6 B + \frac{105}{1728} A^9\right) z^9 + \text{u. s.} \end{matrix}$$

Daraus erhält man folgende Gleichungen

$A = 1$ und $A = 1$

$B + \frac{A}{6} = 0$ und $B = -\frac{1}{6}$

$C + \frac{3}{6} A^2 B + \frac{3}{40} A^5 = 0$ und $C = +\frac{1}{120}$

$D + \frac{3}{6} A^2 C + \frac{3}{6} AB^2 + \frac{15}{40} A^4 B + \frac{15}{336} A^7$ und $D = -\frac{1}{5040}$

E +

$$E + \tfrac{3}{6} A^2 D + ABC + \tfrac{3}{6} B^3 + \tfrac{30}{40} A^3 B^2 + \tfrac{15}{40} A^4 C + \tfrac{105}{336} A^6 B + \tfrac{105}{1728} A^9 = 0 \quad \text{und} \quad E = + \tfrac{1}{362880}$$

Setzt man nun die Werthe von A, B, C, D, E u. s. in die angenommene Reihe von x, so ergiebt sich

$$x \text{ oder } \sin. z = z - \tfrac{1}{6} z^3 + \tfrac{1}{120} z^5 - \tfrac{1}{5040} z^7 + \tfrac{1}{362880} z^9 \text{ u. s. oder } \sin. z = z - \frac{1}{2.3} z^3 + \frac{1}{2.3.4.5.} z^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.} z^7 + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} z^9 - \text{u. s.}$$

Nun ist ferner $\cos. z = \sqrt{(1 - \sin. z^2)}$. Man nehme also $\sqrt{(1 - \sin. z^2)} = A + Bz^2 + Cz^4 + Dz^6 + Ez^8$ u. s. quadire auf beyden Seiten und setze statt $\sin. z^2$ das Quadrat der vorigen Reihe, vergleiche alsdenn die Coefficienten, so findet man

$$\sqrt{(1 - \sin. z^2)} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \frac{z^8}{2.3.4.5.6.7.8} \text{ u. s.}$$

Sucht man also den Bogen z in Theilen des Halbmessers, so kann man den dazu gehörigen Sinus und Cosinus finden, und aus diesen alle übrige trigonometrische Linien. Z. E. Es sey der Sinus und Cosinus des Winkels von 65° zu finden, wenn der Halbmesser = 1 angenommen wird. Man hat

360° : 65° = 6,2831853 : oder
72 : 13 = 6,2831853

13

188495559
62831853

81,6814089 (1,1344640 = z
72

96
72
248 u. f.

$z^3 = 1{,}4600649$
div. 6
$0{,}2433441 = \frac{z^3}{6} = \frac{z^3}{2.3}$

$z^5 = 1{,}8791161$
div. 120
$0{,}0156593 = \frac{z^5}{120} = \frac{z^5}{2.3.4.5}$

$z^7 = 2{,}4184386$
div. 5040
$0{,}0004798 = \frac{z^7}{5040} = \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7}$

$z^9 = 3{,}1125512$
div. 326880
$0{,}0000095 = \frac{z^9}{326880} = \frac{z^9}{2.3.4.5.6.7.8.9}$

mithin $1{,}1344640 = z$

subtr. $0{,}2433441 = \frac{z^3}{2.3}$

$0{,}8911199$

addir. $0{,}0156590 = \frac{z^5}{2.3.4.5}$

$0{,}9067789$

subtr. $0{,}0004798 = \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7}$

$0{,}9062991$

0,9062991

addir. 0,0000095 $= \frac{2^9}{2.3.4.5.6.7.8.9}$

0,9063086 als der Sinus von 65°

Eben so wird auch der Cosinus gefunden.

Anmerk. Berechnet man auf diese Weise die Sinus und Cosinus, und nach Anleitung des 12. §. die übrigen trigonometrischen Linien von Minute zu Minute bis auf 90. Grade, so würde man sie in Tafeln bringen können, um sie daraus benöthigten Falls zu nehmen. Dergleichen Tafeln sind wirklich berechnet worden, und man hat davon kleinere und größere Aufgaben, welche nicht nur die trigonometrischen Linien und deren Logarithmen, sondern auch die Logarithmen der Zahlen für die Basis 10. enthalten. In allen diesen Sammlungen sind die trigonometrischen Linien in Decimalstellen für den Halbmeßer = 1 gesucht, in den mehresten aber nur bis zur 7ten Decimalstelle mitgetheilet worden. Auch hat man sogar das Comma bey der Stelle der Einer weggelaßen, welches eben so viel war, als sie mit der Zahl 10000000 zu multipliciren (§. 90. Arithm.), also den Halbmeßer der Tafeln = 10000000 zu setzen.

§. 17.

Aufgabe.

Die Logarithmen der Sinus und Cosinus zu finden.

Auflösung.

Hat man die Sinus und Cosinus der Bogen von Minute zu Minute für den Halbmeßer = 1 bis auf 7 Decimalstellen gefunden, so kann man dem 314. §. der Arithmetik gemäs die Logarithmen derselben finden, wenn man die Zahlen der Sinus als ganze Zahlen betrachtet. Z. E. in den Tafeln findet man sin. 46° 16' = 7225651, und hiervon ist der Logarithme = 6,8588770. Nun findet man zwar in den Tafeln eben diesen Logarithmen, aber nicht mit der Kennziffer 6, sondern 9. Dies kommt daher, weil man die Sinus für den Halbmeßer = 1 auf mehr als 7 Decimalstellen berechnet hat, und bey Suchung der Logarithmen die 10 ersten Decimalstellen bey behielte, und nun die Zahlen als ganze Zahlen ansahe, welches eben so viel war, als sie alle mit 10000000000 multipliciren, und den Halbmeßer der Tafeln eben so groß annehmen. Weil nun in den gewöhnlichen Tafeln die Zahlen und Logarithmen nur bis zur 7ten Decimalstelle mitgetheilet worden, so hätte man die Kennziffer eigentlich um 3 vermindern sollen. Es ist dies aber deswegens nicht geschehen, weil die Resultate der trigonometrischen Rechnungen dadurch weiter keine Aenderung leiden.

§. 18.

Zusatz.

Es sey r der Halbmeßer der Tafeln, und z jeder in Graden ausgedruckte Winkel oder Kreisbogen; so hat man tang. $z = \frac{r. \sin. z}{\cos. z}$ (§. 11. 12.),

und

und sec. $z = \frac{r}{\text{col. } z}$, mithin l. tang. $z =$ l. r + l. sin. z — l. cos. z und l. sec. $z =$ l. r — l. cos. z. Sind also die Logarithmen der Sinus und Cosinus bekannt, so kann man hieraus die Logarithmen für die Tagenten und Sekanten leicht finden.

§. 19.

Zusatz.

Es sey (fig. 132.) cea $=$ z und ca die Sehne dieses Bogens. Zieht man nun den Halbmeßer be auf die Sehne ac senkrecht, so wird cf $=$ sin. $\frac{1}{2}$ z, also ac $=$ 2 sin. $\frac{1}{2}$ z, cd $=$ sin. z, und ad $=$ sin. v. z. Nun hat man $ca^2 = cd^2 + ad^2$, oder $4(\text{sin. } \frac{1}{2} z)^2 = (\text{sin. } z)^2 + (\text{sin. v. } z)^2$. Für den Halbmeßer $= 1$ ist sin. $z^2 = 1 - \text{cos. } z^2$ (§. 12.) und sin. v. $z^2 =$ $(1 - \text{cos. } z)^2 = 1 - 2\text{cos. } z + \text{cos. } z^2$, mithin $4(\text{sin. } \frac{1}{2} z)^2 = 1 - \text{cos. } z^2 + 1 - 2\text{cos. } z + \text{cos. } z^2$ $= 2 - 2\text{cos. } z = 2(1 - \text{cos. } z) = 2\text{sin. v. } z$, also $2(\text{sin. } \frac{1}{2} z)^2 =$ sin. v. z Hieraus folgt nun die Proportion 1 : sin. $\frac{1}{2}$ z $=$ 2 sin. $\frac{1}{2}$ z : sin. v. z. (§. 176. Arithm.) Die Proportion aber ist für jeden andern Halbmeßer r richtig (§. 11.), demnach hat man auch

r : sin. $\frac{1}{2}$ z $=$ 2 sin. $\frac{1}{2}$ z : sin. v. z, mithin

l. sin. v. z $=$ l. 2 + 2 l. sin. $\frac{1}{2}$ z. — l. r.

§. 20.

Aufgabe.

Es ist ein Winkel gegeben, der ausser Graden und Minuten noch Sekunden enthält, man soll den Logarithmen der zu diesem Winkel gehörigen trigonometrischen Linie mittelst der gemeinen Tafeln finden.

Auflösung.

Man kann hier, wie im §. 313. der Arithmetik voraussetzen, daß die Differenzen der Logarithmen sich zu einander verhalten, wie die Differenzen der dazu gehörigen Winkel. Demnach subtrahire man den Logarithmen der trigonometrischen Linie, welche zu den Winkel gehöret, der dem gegebenen am nächsten kömmt, von dem Logarithmen der trigonometrischen Linie, welche zu dem nächstgrößern Winkel gehöret, und spreche, wie sich 60^{11} zu der Anzahl der gegebenen Sekunden verhalten, so verhält sich diese Differenz zu der vierten Proportionalzahl, welche man zum kleinern Logarithmen addiren muß, wenn die trigonometrische Linie mit dem Winkel wächst, wie der Sinus, die Tangente und Sekante unter 90°. Nimmt aber die trigonometrische Linie ab, wenn der Winkel wächst, wie der Cosinus, die Cotangente und Cosekante, so muß man die vierte gefundene Proportionalzahl von dem größern Logarithmen subtrahiren. Z. E Es sey der Logarithme sin. $68° 14' 24''$ zu suchen

In den Tafeln findet man

l. sin. $68° 15' = 9{,}9679267$

l. sin. $68° 14' = 9{,}9678763$

Diff. $1'$ Diff. 0,0000504

Nun hat man an

$60'' : 24'' = 0{,}0000504 : 0{,}0000201$

24

2016

2016
1008

12096 (201
6660

und man erhält

l. sin. 68° 14' = 9,9678763
l. 24'' = 0,0000201
l. sin. 68° 14' 24'' = 9,9678964

§. 21.

Aufgabe.

Es ist der Logarithme einer trigonometrischen Linie gegeben, der nicht in den Tafeln enthalten ist, man soll den dazu gehörigen Winkel finden.

Auflösung.

Man nehme die Differenz von zweyen Logarithmen, zwischen welchen der gegebene fällt, und subtrahire auch den gegebenen von dem größern, alsdenn spreche man, die erste Differenz verhalte sich zur zweyten, wie sich verhalten 60'' zu der vierten Zahl. Diese Zahl addire man nun zu den Winkel, welcher dem nächstkleinern Logarithmen zugehöret, wenn die trigonometrische Linie mit dem Winkel wächst; sonst müßte man sie davon subtrahiren. Z. E. Es sey der Logarithme eines Sinus 9,9846328 gefunden worden, man soll den dazu gehörigen Winkel suchen. In den Tafeln findet man

l. sin. 74° 51' = 9,9846375
l. sin. 74° 50' = 9,9846083

Diff. 1' Diff. 0,0000342

Der gegebene Logar. = 9,9846328
l. sin. 74° 50' = 9,9846083
Diff. 0,0000295

Nun setzt man an

0,0000342 : 0,0000295 = 60'' : 52''

60
17700 (52''
242
1710
600

mithin ist der gesuchte Winkel 74° 50' 52''

Zweytes Kapitel.

Von der Berechnung der Seitenlinien und Winkel geradlinichter Dreyecke und geradlinichter Figuren.

§. 22.

Lehrsatz.

Im rechtwinklichten Dreyecke abc (fig. 133.) verhalten sich die Seitenlinien zu einander, wie die Sinus der den Seitenlinien entgegengesetzten Winkel.

Auch verhält sich eine Perpendikulärseite zur andern, wie der ganze Sinus zur Tagente des der andern Perpendikulärseite entgegengesetzten Winkels.

Beweis.

Man beschreibe mit dem Halbmeßer cb den Kreisbogen cd, so ist ca der Sinus des Bogens cd oder des Winkel cbd, und es ergiebt sich cb : ca = sin.

tot

tot: sin. cba. Aus eben dem Grunde hat man auch cb : ab = sin. tot: sin. abc. Aus beyden Proportionen folgt nunmehr die dritte ac: ab = sin. cba: sin. acb.

Beschreibt man ferner mit dem Halbmeßer ab den Bogen ae, so wird ac die Tangente des Winkels abc, und es ist ab: ac = sin. tot.: tang. abc. Aus eben dem Grunde ist auch ac: ab = sin. tot: tang. acb.

§. 23.

Lehrsatz.

In jedem Dreyecke verhalten sich die Seitenlinien zu einander, wie die Sinus der den Seitenlinien entgegengesetzten Winkel.

Beweis.

Man ziehe aus der Spitze c des Dreyecks abc (fig. 134) die senkrechte Linie cd herab, so erhält man zwey rechtwinklichte Dreyecke acd und cdb, und es ergiebt sich

ac: cd = sin. tot.: sin. cab. und
cd: cb = sin. cba: sin. tot. also auch
ac: cb = sin. cba: sin. cab. (§. 190. Arithm.)

Aus eben dem Grunde ist auch
ab: ac = sin. acb: sin. cba. Da nun
ac: cb = sin. cba: sin. cab, so folgt
ab: cb = sin. acb: sin. cab (§. 189. Arithm.)

§. 24.

Aufgabe.

Es sind in dem Dreyecke acb zwey Winkel und eine Seite ab in Zahlen gegeben, man soll die übrigen beyden Seiten durch Rechnung finden.

Auflösung.

Erster Fall.

Ist das Dreyeck rechtwinklicht, so kann

I. Die Hypothenuse ab gegeben seyn, und man findet die beyden Catheten ac und cb folgender Maassen:

sin. tot : ab = sin. cba : ca und
sin. tot : ab = sin. cab : cb.

Es sey z. E. a = 54° 16', c = 90° und ab = 454'. Zuförderst suche man den Winkel b, und man findet

a = 54° 16'
c = 90°
a + c = 144° 16'

a + c + b = 179° 60'
a + c = 144° 16'
b = 35° 44'

Demnach hat man

sin. 90° : 445' = sin. 35° 44' : x und
sin. 90° : 454' = sin. 54° 16' : y

Führt man mittelst der Logarithmen die Rechnung so ergiebt sich.

l. 454 = 2,6570558
l. sin. 35° 44' = 9,7664229
12,4234787
l. sin. 90° = 10
l. x = 2,4234787 = l. ca
also ac = 265,257' (§. 315. Arithm.)

Ferner ist l. 454 = 2,6570558
l. sin. 54° 16' = 9,9094190
12,5664748
l. sin. 90° = 10
l. y = 2,5664748 = l. cb
Also cb = 368,568'

II. Kann

II. Kann einer von den Catheten gegeben seyn, und man findet den andern nebst der Hypothenuse nach folgenden Proportionen:

sin. cba : ac = sin. tot : ab und
sin. cba : ac = sin. cab : cb

Auch läßt sich der andere Cathetus durch Hülfe der Tangenten finden:

sin. tot : tang : abc = cb : ac (§. 22.).

Hat man Tafeln, worinn die Sekanten sind berechnet worden, so kann man die Hypothenuse nach folgender Proportion erhalten

sin. tot : sec. b = ac : ab.

Zweyter Fall.

Ist das Dreyeck spitzwinklicht, so kann man ansetzen

sin. acb : ab = sin. cab : cb und
sin. acb : ab = sin. cba : ca

Es sey z. E. acb = 45° 43′, cab = 54° 30′ und ab = 565′. Vors erste suche man den Winkel cba; er ergiebt sich also

a =	54° 30′	a + b + c =	179° 60′
c =	45° 43′	a + c =	100° 13′
a + c =	100° 13′	b =	79° 47′

Demnach hat man

sin. 45° 43′ : 565′ = sin. 54° 30′ : cb
sin. 45° 43′ : 565′ = sin. 79° 47′ : ca

Gebrauchet man in der Rechnung die Logarithmen, so hat man l. 565′ = 2,7528164
l. sin. 54° 30′ = 9,9106860
12,6635024
l. sin. 45° 43′ = 9,8548499

l. cb = 9,8086525 also
cb = 643,6[1]

Dritter Fall.

Ist das Dreyeck stumpfwinklicht, so verfähret man in der Hauptsache eben so wie im zweyten Falle, nur nimmt man beym stumpfen Winkel den Sinus eines spitzen Winkels, welcher sich mit dem stumpfen zu 180° ergänzet.

§. 25.

Aufgabe.

Es sind zwey Seitenlinien nebst einem Winkel, welcher von diesen Seitenlinien nicht eingeschloßen wird, gegeben, man soll die dritte Seite und die beyden übrigen Winkel durch Rechnung finden.

Auflösung.

Sind im Dreyecke abc die Seinenlinien ab und ac nebst dem Winkel c gegeben, so suche man zuerst die Winkel. Vermittelst der Proportion

ab : sin. acb = ac : sin. abc

findet man den Winkel b. Allein dieser Winkel kann so wohl spitz als stumpf seyn. Ist indeßen c stumpf oder ein rechter Winkel, so ist b allemal spitz, auch alsdenn ist b spitz, wenn auch c spitz aber ab > ac. Demnach bleibt es nur noch einigen Zweifel unterworfen, ob b spitz oder stumpf, wenn c spitz und ab < ac. Jedoch weiß man in der Ausübung meistentheils die Größe der Winkel einiger Maassen, daher auch dieser Zweifel wegfällt.

Hat man nun den Winkel b gefunden; so ist auch a bekannt, und die dritte Seite cb findet man mittelst der Proportion

sin. c : ab = sin. a : ab.

Es sey z. E. c = 56° 42', ab = 656', ac = 489'. Hier ist ab > als ac, also auch der Winkel b < c, und man findet b also:

656' : sin. 56° 42' = 489' sin. abc

Nun ist l. sin. 56° 42' = 9,9221062

l. 489 = 2,6893089

12,6114151

l. 656 = 2,8169038

l. sin. abc = 9,7945113

also b = 38° 32' 43".

Ferner ist c = 56° 42' c+b+a = 179° 59' 60"

b = 38° 32' 43" c+b = 95° 14' 43"

c+b = 95° 14' 43' a = 84° 45' 17"

Nun hat man sin. 56° 42' : 656' = sin. 84° 45' 17" : cb

Also l. 656 = 2,8169038

l. sin. 84° 45' 17" = 9,9981776 (§. 20.).

12,8150814

l. sin. 56° 42' = 9,9221062

l. cb = 2,8929752

also cb = 781, 5'

§. 26.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seitenlinien (ac + ab) (fig. 135.) zu ihrer Diefferenz (ab — ac), wie die Tagente der halben

den Summe der Winkel, welche jenen beyden Seitenlinien entgegengesetzet sind (tang. $\frac{1}{2}$(acb + abc)) zur Tagente der halben Differenz derselben (tang. $\frac{1}{2}$(acb — cba)).

Beweis.

In dem Dreyeck abc sey die Seitenlinie ab > ac. Man schneide auf ab das Stück ad = ac ab, so ist ab + ac die Summe und ab — ac = ab — ad = db die Differenz zweyer Seitenlinien des Dreyecks abc. Nun verlängere man ab nach e, so daß ae = ac = ad wird, ziehe dc und ec, so ist ecd ein rechter Winkel (§. 129. Geomet.). Durch b. ziehe man auch die gerade Linie bf mit dc parallel, bis sie die verlängerte ec in dem Punkte f schneide, so ist auch der Winkel f ein rechter. Ferner ist der Winkel eac = acb + cba (§. 52. Geom.) also $\frac{1}{2}$ eac = $\frac{1}{2}$(acb + cba) = cda = fbd (§. 60. Geom.), und der Winkel fbc = fbd — cba = $\frac{1}{2}$ acb + $\frac{1}{2}$ cba — $\frac{1}{2}$ cba — $\frac{1}{2}$ cba = $\frac{1}{2}$ (acb — cba). Nun ist für den Winkel fbc die Linie fc, und für den Winkel fbd = $\frac{1}{2}$ (cbc + cba) die Linie fe die Tangente. Demnach hat man

eb : db = ef : cf oder

ac + ab : ab — ac = tang. $\frac{1}{2}$(acb + cba) : tang. $\frac{1}{2}$ (acb — cba).

§. 27.

Zusatz.

In dem Dreyecke acb ist auch ab : ac = sin. acb : sin. cba. (§. 23.), und hieraus folgt ab + ac : ab

ab — ac = sin. acb + sin. cba : sin. acb — sin. abc. (§. 191. Arithm.). Demnach ist auch sin. acb + sin. abc : sin. acb — sin. abc = tang. $\frac{1}{2}$ (acb + cba) : tang. $\frac{1}{2}$ (acb — cba).

§. 28.

Aufgabe.

In einem Dreyecke sind zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben, man sucht die beyden übrigen Winkeln und die dritte Seite durch Rechnung.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn ac und ab nebst dem Winkel a gegeben und a ein rechter Winkel ist, so findet man die beyden übrigen spitzen Winkel leicht durch Hülfe der Tangenten, indem man ansetzen kann

ab : ac = sin. tot tang. abc

und es ist c = 180° — 90° — b. Die dritte Seite cb findet man durch Hülfe der Proportion

sin. acb : ab = sin. tot : cb.

Es sey z. ac = 356′, ab = 436′; so hat man

436′ : 356′ = sin. tot : tang. abc.

Nun ist l. 356 = 2,5514500

l. sin. tot. = 10,

12,5514500

l. 436 = 2,6394865

l. sin. abc = 9,9119635

also abc = 39° 13′ 4″

mithin c = 90 — 39° 13′ 4″ = 50° 46′ 56″.

Endlich hat man sin. 50° 46′ 96″ : 436′ = sin. tot : cb

mithin

mithin l. 436′ = 2,6394865
l. sin. tot. = 10,
12,6394865
l. sin. 50°46′56″ = 9,8891699
l. cb = 2,7503166
also cb = 562,7′

Zweyter Fall. Ist a kein rechter Winkel, so suche man die beyden Winkel c und b durch folgende Proportion ac + ab : ab — ac = tang. $\frac{1}{2}$ (c + b) : tan. $\frac{1}{2}$ (c — b), und man erhält den Winkel $\frac{1}{2}$ (c — b). Alsdenn ist c = $\frac{1}{2}$ (c + b) + $\frac{1}{2}$ (c — b) und b = $\frac{1}{2}$ (c — b) — $\frac{1}{2}$ (c — b) (§ 186. Arithm.). Hat man auf diese Weise die Winkel gefunden, so ergiebt sich die dritte Seitte cb durch diese Proportion

sin. c : ab = sin. a : cb.

Es sey z. E. a = 75° 6′, ab = 356′, und ac = 436′. Nun hat man c + b = 180° — a und $\frac{1}{2}$ (c + b) = 90° — $\frac{1}{2}$a = 90° — 37° 33′ = 52° 27′; demnach 356 + 436 : 436 — 356 = tang. 52° 33′ : tan. $\frac{1}{2}$ (c — b) oder 792 : 80 = tang. 52° 33′ : tang. $\frac{1}{2}$ (c — b)

also l. tang. 52°33′ = 10,11158c44
l. 80 = 1,9030900
12,0188944
l. 792 = 2,8987251
l. tang. $\frac{1}{2}$ (c — b) = 9,1201c02
also $\frac{1}{2}$ (c — b) = 7° 40′ 15″
folglich c = 52° 33′ + 7° 30′ 15″ = 60° 3′ 15′
b = 52° — 7° 30′ 15″ = 44° 29′ 45″.

Endlich hat man sin. 60°. 3′ 15″ : 356′ = sin. 75° 6′ : cb.

Nun

Nun ist l. 356 = 2,5514500
l. si. 75° 6′ = 9,9851462
12,5365962
l. si. 60° 3′ 15″ = 9,9377674
l. cb = 2,5988288
also cb = 397.

§. 29.

Aufgabe.

Es sind die drey Seiten des Dreyecks abc (fig. 134.) gegeben, man soll die von der senkrechten aus der Spitze c auf die Linie ab herabgelaßenen Linie abgeschnittenen Theile ad und db finden.

1. Auflösung.

Man setze ac = a, bc = b und ab = c und ad = x, so ist db = c − x. Nun hat man $ac^2 = ad^2 + dc^2$ und $bc^2 = db^2 + dc^2$, also $ac^2 - ad^2 = dc^2$ und $bc^2 - db^2 = dc^2$. Demnach

$ac^2 - ad^2 = bc^2 - db^2$ oder
$a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$ oder
$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$ oder
$a^2 = b^2 - c^2 + 2cx$, also
$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = x$ oder
$\frac{a^2 - b^2}{2c} + \frac{1}{2}c = x$ oder
$x = \frac{1}{2}c + \frac{(a+b)(a-b)}{2c}$ (§. 52. Arithm. 2. Fall).

2. Auflösung.

Man nehme (fig. 136) de = dc, so ist be = bd − dc = der Differenz der Segmente: Diese Differenz findet man nach folgender Proportion:

bc : ab + ac = ab − ac : be. Nun hat man bd = ½ bc + ½ be und dc = ½ bc − ½ be (§. 186. Arithm.).

Beweis.

Man beschreibe aus dem Punkte a mit dem Halbmeßer ac einen Kreis, dieser schneidet bc in e und ab in f. Nun verlängere man ab bis g, so ist ag = ac und bg = ba + ac. Ferner ziehe man fc und eg, so ist der Winkel bge = fcb (128. Geom.) und b ist beyden Dreyecken gemein, also sind beyde Dreyecke gbe und fbc einander ähnlich, und es ergiebt sich bc : bg = bf : be oder bc : ba + ac = ab − ac : be.

§. 30.

Aufgabe.

Es sind die drey Seiten eines Dreyecks abc (fig. 134.) gegeben, man soll die drey Winkel durch Rechnung finden.

Auflösung.

Man suche die beyden Segmente ad und db, alsdenn erhält man zwey rechtwinklichte Dreyecke acd und dcb, und man findet mittelst der Proportion den Winkel acd

ac : sin. tot. = ad : sin. acd,

und den Winkel dcb mittelst der Proportion

cb : sin. tot. = db : sin. dcb

folglich acb + dcd = b. Nun kann man aber auch

einen

einen von den beyden andern Winkeln a oder b, und hieraus den dritten finden.

Es sey z. E. ac = 436′, ab = 624′ und cb = 734′ so findet man

734 : 1060 = 188 : 271,5 also

bd = 502,7′ und da = 231,3′; demnach hat man

436′ : sin. tot. = 231,3′ : sin. acd.

Nun ist l. 231,3′ = 2,3641756 (§. 312. 314 Arith.)

l. sin. tot. = 10

12,3641756

l. 436. = 2,6394865

l. sin. acd = 9,7246841 also

acd = 32° 2′ 37″

Ferner hat man

734 : sin. tot. = 502,7′ : sin. dcb

und es ergiebt sich l. 502,7′ = 2,7013089.

l. sin. tot. = 10

12,7013089

l. 734. = 2,8656961

l. sin. dbc = 9,8356128, also

dcb = 43° 13′ 27″

demnach acd = 32° 2′ 38″

dcb = 43° 13′ 27″

und acb = 70° 13′ 5″

§. 31.

Zusatz.

Es sey (fig. 137.) ab = α, bc = β, ac = γ und der Winkel bac = x, so hat man γ : α + β = α − β : ae also $ae = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\gamma} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma}$

(§. 52. 2ter Fall Arithm.) und $ad = \frac{1}{2}\gamma + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma}$ $= \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}$. Da nun in dem Dreyecke abd, ab : sin. tot $=$ ad : sin. abd, oder α : sin. tot $=$ $\frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}$: cos. x so ergiebt sich cos. x $=$ sin. tot. $\left(\frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}\right)$. Hieraus folgt ferner cos. x. $2\alpha\gamma =$ sin. tot. $(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2)$ und $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \frac{\text{cos. x. } 2\alpha\gamma}{\text{sin. tot.}}$ also $\beta = V\left(x^2 + \gamma^2 - \frac{\text{cos. x. } 2\alpha\gamma}{\text{sin. tot.}}\right)$. Wären also in einem Dreyecke zwey Seitenlinien nebst dem eingeschloßenen Winkel gegeben so könnte man ebenfalls nach dieser Formel die dritte Seitenlinie finden.

§. 32.

Aufgabe.

Es ist der Halbmeßer cg (fig. 67.) eines Kreises nebst der Zahl der Seitenlinien eines regulären Polygons gegeben, man soll die Seitenlinie des in oder um den Kreis beschriebenen regulären Polygons durch Rechnung finden.

Auflösung.

Man suche nach Anleitung des §. 169. der Geom. den Polygonwinkel f, so hat man hf $=$ r. sin. fch (§. 11.) oder hf $=$ r. cos. $\frac{1}{2}$ f, weil cos. $\frac{1}{2}$ f $=$ sin. fch (§. 3.), mithin 2hf oder gf $=$ 2r cos. $\frac{1}{2}$ f. Ferner

ist

ist ad = r. tang. fch (§. 11.), oder ad = r. cotan. $\frac{1}{2}$ f, weil tang. fch = cotan. $\frac{1}{2}$ f, folglich 2ad oder ab = 2r cot. $\frac{1}{2}$ f.

Für das Neuneck ist der halbe Polygonwinkel = 70° (§. 170. Geom.). Ist nun r = 643', so findet man fg = 2. 643. cot. 70°, und die Rechnung giebt

l. 2 = 0,3010300
l. r = 2,8082110
l. cot. 70° = 9,5340517
12,6432927
10

l. fg = 2,6432927, also fg = 439,8'.

Ferner für das Neuneck um den Kreis

l. 2 = 0,3010300
l. r = 2,8082110
l. cot. 70° = 9,5610658
12,6703068
10

l. ab = 2,6703068 also ab = 468,1'.

§. 33.

Aufgabe.

Es ist der Halbmesser cf nebst der Anzahl von Graden des Kreisbogens fdb gegeben, man soll die dazu gehörige Sehne gf finden.

Auflösung.

Theilt man den Winkel fcg durch die gerade Linie cd in zwey gleiche Theile, so wird zugleich der Bogen fdb und die dazu gehörige Sehne fg halbiret,

und es ist fg der doppelte Sinus des halben Bogens fdb. Setzt man also die Anzahl der Grade des Bogens, fdb = n, so erhält man folgende Proportion

sin. tot : 2sin. $\frac{1}{2}$n = cf : fg, also

$$fg = \frac{2\text{sin. } \frac{1}{2}\text{n. cf}}{\text{sin tot.}}$$

Es sey z. E. n = 72° 14′, also $\frac{1}{2}$n = 36° 7′, cf = 346′, so giebt die Rechnung

l. 2 = 0,3010300
l. sin. $\frac{1}{2}$n = 9,7704332
l. cf = 2,5390761

12,6105393
10

l. fg = 2,6105393, also fg = 398,6.

§. 34.

Aufgabe.

Es sind im Parallellogramm abec (fig. 138.) die beyden Seitenlinien ab und ac nebst dem eingeschloßenen Winkel a gegeben, man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Auflösung.

Man laße die senkrechte Linie Linie bd auf ac herab, so ist $bd = \frac{\text{ab. sin. a}}{\text{sin. tot.}}$ (§. 22.). Also ist der

Flächeninhalt des Parallellogramms = $\frac{\text{ac. ab. sin. a.}}{\text{sin. tot.}}$

Es sey ab = 636′, ac = 540′ und a = 56° 24′, so giebt die Rechnung

l. ac

l. ac = 2,7323938
l. ab = 2,8034571
l. sin. a = 9,9206039

15,4564548
10

l. $\frac{\text{ac. ab. sin. a}}{\text{sin. tot.}}$ = 5,45564548, also das Parallelogramm = 286041,1□′

§. 35.

Aufgabe.

Es sind die drey Seiten des Dreyecks abc gegeben (fig. 137.), man soll den Flächeninhalt deßelben finden.

Auflösung.

Es sey ab = α, bc = β, ac = γ, und der Winkel bac = x, so ist der verlangte Inhalt des Dreyecks = $\frac{1}{2}\gamma$ bd (229 Geom.). In dem Dreyecke abd hat man sin. tot.: α = sin. x : bd, also bd = $\frac{\alpha . \text{sin. x}}{\text{sin. tot.}}$. Nach dem §. 31. war cos. x. = $\frac{\text{sin. tot.}}{2\alpha\gamma}$, und sin. x = V(sin. tot.^{2} − cos. x^2) (§. 12.) = V(sin. tot. + cos. x)(sin. tot. − cos. x) (§. 52. 2ter Fall Arithm.). Setzt man statt cos. x den vorigen Werth so ergiebt sich sin. tot. + cos. $x = \text{sin. tot.} + \left(\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}\right)$ sin. tot. = sin. tot. $\left(\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} + 1\right)$ = sin. tot. $\left(\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha\gamma}{2\alpha\gamma}\right)$

$= \text{lin. tot.} \left(\frac{(\alpha+\gamma)^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \right) = \text{lin. tot.} \left(\frac{(\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)}{2\alpha\gamma} \right)$,

weil $(\alpha+\gamma)^2 - \beta^2 = (\alpha+\gamma+\beta.)(\alpha+\gamma-\beta)$,

und lin. tot. — col. x $=$ lin. tot. — lin. tot.

$\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \right) =$ lin. tot. $\left(\frac{\beta^2-\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha\gamma} + 1 \right)$

$=$ lin. tot. $\left(\frac{\beta^2-\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\beta}{2\alpha\beta} \right) =$ lin. tot.

$\left(\frac{\beta^2-(\alpha-\gamma)^2}{2\alpha\gamma} \right) =$ lin. tot. $\left(\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)}{2\alpha\gamma} \right)$,

weil $\beta^2 - (\alpha-\gamma)^2 = (\alpha+\beta-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)$.

Demnach wird lin. x $= \frac{\text{lin. tot.}}{2\alpha\gamma} \sqrt{\left((\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma) \right)}$. Weil nun bd $= x \frac{\alpha. \text{ lin. x}}{\text{lin. tot.}}$, so findet man, wenn statt lin. x der eben gefundene Werth geseket wird, bd $= \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\left((\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma) \right)}$ $=$ bd; also der Inhalt des Dreyecks $\frac{1}{2}\gamma.$ bd $= \frac{1}{4} \sqrt{\left((\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma) \right)}$.

Es sey z. E $\alpha = 42'$; $\beta = 30'$, $\gamma = 45'$, so giebt die Rechnung

l. $(\alpha+\gamma+\beta) =$ 2,0718820

l. $(\alpha+\gamma-\beta) =$ 1,7558748

l. $(\beta+\alpha-\gamma) =$ 1,4313638

l. $(\beta-$

l. (β − α + 8) = 1,5314789

6,7905995

Div. 2

3,3952947

l. 4 = 0,6020600

l. abc = 2,7932347, also der Inhalt des Dreyecks abc = 621,79 □'.

Anfangsgründe
der sphärischen
Trigonometrie.

Erstes Kapitel.
Von den körperlichen und sphärischen Dreyecken.

§. 1.
Erklärung.

Wenn drey oder mehrere geradlinichte Winkel (fig. 139.) bca, bcd und dca in einerley Punkt c, wie etwa die Seitenflächen einer Pyramide in der Spitze, also zusammenfallen, daß zwey anliegende Winkel einen gemeinschaftlichen Schenkel besitzen, so nennt man diesen von den Ebenen der Winkel eingeschloßenen Raum einen **körperlichen Winkel** oder eine **Ecke**; die ebenen Winkel heißen alsdenn die **Seitenflächen**, und die Winkel, unter welchen die Seitenflächen gegen einander geneigt sind, die **Winkel der Ecke**. Die Ecken erhalten von der Anzahl der Seitenflächen den Nahmen einer **dreyseitigen, vierseitigen, fünfseitigen u. s. Ecke.** Insbeson-

besondere wird eine dreyseitige Ecke ein körperliches Dreyeck genennt.

§. 2.

Zusatz.

Es sey cb = ca = cd, so kann man mit dem Halbmeßer cb die Bogen ba, bd und da beschreiben, und c als den Mittelpunkt einer Kugel annehmen, auf deßen Oberfläche diese Bogen sich befinden, und Bogen größter Kreise sind. Demnach begränzen diese Bogen ein sphärisches Dreyeck (§. 365. Geom.). Die Winkel dieses sphärischen Dreyecks sind mit den Winkeln des körperlichen Dreyecks einerley, und die Bogen, welche die Seitenlinien des sphärischen Dreyckes ausmachen, sind die Maasse der Winkel, welche als die Seitenflächen der Ecke betrachtet werden. Will man also die Seitenlinien des sphärischen Dreyecks bloß in Graden und Theilen davon wißen, so sind sie bekannt, so bald die Winkel der Seitenflächen des körperlichen Dreyecks bekannt sind. Im folgenden wird nur von solchen sphärischen Dreyecken die Rede seyn, worinn kein Winkel die Gränze von 180° übertrift.

§. 3.

Zusatz.

Es läßt sich demnach jedes körperliche Dreyeck als ein sphärisches und umgekehrt, jedes sphärische als ein körperliches betrachten, deßen Spitze in dem Mittelpunkte der Kugel liegt.

§. 4.

§. 4.

Zusatz.

Man verlängere die Seitenlininien ab und ad des sphärischen Dreyecks abd nach den Punkten f und e bis sie Quadranten werden, und führe durch diese beyden Punkte f und e einen größten Kreis, so ist die Spitze a des sphärischen Winkels der zu diesem größten Kreise gehörige Pol (§. 363. Geom.). Wenn man nun die Halbmeßer ce, cf und ca ziehet, so sind die Kreisausschnitte ace, acf und cef die Seitenflächen eines körperlichen Dreyecks, deßen Spitze in dem Mittelpunkte der Kugel liegt, und die beyden Seitenflächen ace, und acf schneiden einander in der geraden Linie ac, welche auf der Ebene des Kreises, der durch c und f gehet, senkrecht steht, und folglich deßen Axe und a der dazu gehörige Pol ist. Der Winkel ecf ist der Neinungswinkel der Ebene des Kreisausschnittes acf gegen ace, und der Bogen ef das Maas von diesem Winkel, also auch das Maas des sphärischen Winkels a, weil $a = ecf$ (§. 2.).

§. 5.

Zusatz.

Wenn also in einem sphärischen Dreyeck abc die eine Seitenlinie $bd. < 180°$, so ist auch der gegenüberstehende Winkel $a < 180°$. Denn es ist $ef < 180°$ also auch $a < 180°$. Weil ferner $ef + eg = 180°$ und eg das Maas des Winkels gae, so folgt, daß zwey sphärische Nebenwinkel sich ebenfalls, wie die ebenen, einander zu 180° ergänzen, und das die Scheitelwinkel einander gleich seyn müßen.

§. 6.

§. 6.

Zusatz.

Man verlängere die Halbmeßer cb, cd und ca so weit, daß sie die Oberfläche der Kugel in den Punkten i, h und k treffen, so ist alsdenn der Kreisausschnitt dcb = cih; acb = cik und cad = chk, also der Bogen ih = db, ik = ab und hk = ad, mithin auch der Winkel i = b, h = d und a = k. Wenn also die drey Seiten zweyer sphärischen Dreyecke gleich groß sind, so sind auch die den gleichen Seiten entgegen gesetzten Winkel gleich groß.

§. 7.

Zusatz.

Legt man die Spitze i des sphärischen Dreyecks auf die Spitze b des andern sphärischen Dreyecks abd, so fällt der Bogen hi längst bd, ik längst ab und hk längst ad, also paßt das eine sphärische Dreyeck auf das andere. Nimmt man nun ab = bd, = ih, so kann man den Winkel k auf a legen, und es fällt nun ih auf ab, ik auf bd und hk auf ad so daß ebenfalls beyde Dreyecke einander decken. In gleichschenklichten sphärischen Dreyecken sind demnach die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich groß; folglich sind auch in einem gleichseitigen sphärischen Dreyecke alle Winkel gleich, und wenn in einem sphärischen Dreyecke alle Winkel gleich sind, so ist es gleichseitig.

§. 8.

Lehrsatz.

In einem jeden sphärischen Dreyecke ist die Summe zweyer Seitenlinien db + ab (fig. 140.) größer als die dritte da.

Beweis.

Beweis.

Sind die drey Seiten des sphärischen Dreyecks gleich groß, so ist es schon für sich klar, daß zwey Seiten zusammengenommen größer als die dritte ist. Ist aber da > db, so ist auch der Winkel dca > dcb. Nun ziehe man ad, und mache den Winkel ace = bca, nehme cf = ce, und ziehe df und fa, so ist fa = ae, und es wird df + fa > de + ea oder df + ea > de + ea mithin df > de, und daher der Winkel dcf + acb > dce + eca oder dcb + acb > dca, folglich auch db + ba > da.

§. 9.

Lehrsatz.

Die Summe aller dreyer Seitenlinien des sphärischen Dreyecks dab beträgt weniger als 360°.

Beweis.

Man verlängere die Seitenlinien db und ba, bis sie sich in dem Punkte g schneiden, so wird bd + dg = 180° und ba + ag = 180° (§. 360. Geom.), also bd + dg + ba + ag = 360°. Nun ist dg + ag > da, mithin bd + ba < 360° — da (§. 25. Arithm.), also auch bd + ba + da < 360°.

§. 10.

Lehrsatz.

In einem jeden sphärischen Dreyecke ist der grössern Seite (fig. 125) af ein größerer Winkel aef und der kleinern Seite ein kleinerer Winkel fae entgegengesetzt;

Auch

Auch umgekehrt, dem größten Winkel ist eine größere Seite und dem kleinern eine kleinere Seite entgegengesetzt.

Beweis.

Man mache den Winkel aeg = eag, so ist ge = ga mithin ag + gf oder af = eg + gf (§. 7.). Nun ist aber eg + gf > fe (§. 8.) mithin auch af > fe.

Ist der Winkel aef > fae, so ist entweder af = ef, oder af < ef oder af > ef. Wäre das erste, so müßte aef = fae seyn, wäre aber das ander, so müßte aef < fae seyn, demnach ist af > ef.

§. 11.

Lehrsatz.

Wenn zwey sphärische Dreyecke abd und αβδ (fig. 141.) welche auf der Oberfläche einer Kugel befindlich sind, zwey gleiche Winkel a = α, b = β und eine gleiche anliegende Seite ab = αβ haben, so sind die übrigen beyden Seitenlinien nebst die den gleichen Seitenlinien entgegengesetzten Winkeln gleich groß.

Beweis.

Wenn man die Halbmeßer aus dem Mittelpunkte der Kugel c und γ in die Winkelpunte der sphärischen Dreyecke ziehet, so erhält man zwey körperliche Dreyecke, welche in einander paßen. Denn legt man die Seitenfläche αγβ auf abc so, daß die Linie γα auf ac, und γβ auf cb zu liegen kömmt, so fällt der Punkt α auf a und β auf b. Weil nun α = a und β = b, so fällt auch αγδ auf acd und

δγβ

δαβ auf dcb, also paßt das körperliche Dreycke αδβ in das körperliche Dreyeck acbd, und αδ fällt längst ad und βδ längst bd, demnach ist das Dreyeck αβδ = abd.

§. 12.

Lehrsatz.

Wenn in beyden sphärischen Dreyecken abd und αβδ die Seitenlinien ab = αβ, bd = βδ, und der eingeschloßene Winkel b = β, so ist alles in beyden Dreyecken gleich groß.

Beweis.

Verzeichnet man wie im vorigen §. die den sphärischen Dreyecken zugehörigen körperlichen Dreyecke, so paßen alsdenn die Seitenflächen αβδ und abc, βδδ und bcd auf einander, mithin fällt der Punkt α auf a, β auf b und δ auf d, und die Seitenfläche αδδ auf acd, folglich paßet wiederum das eine körperliche Dreyeck αδβδ in das andere acdb, und die Dreyecke abd und αβδ sind gleich groß.

§. 13.

Zusatz.

Ist ab = ad oder abd ein gleichschenklichtes Dreyeck, und ein Bogen theilt den Winkel a in zwey gleiche Theile, so halbiret er auch zugleich die entgegengesetzte Seitenlinie bd, und steht auf derselben senkrecht; auch umgekehrt, ein Bogen, welcher auf der Mitte der Seitenlinie bd senkrecht steht, geht durch die Spitze a und halbiret den Winkel a.

§. 14.

Lehrsatz.

In zweyen sphärischen Dreyecken (fig. 142.) afe und afb können zwey Seitenlinien und ein Winkel, welcher der einen Seitenlinie entgegengesetzet ist, gleich seyn, und gleichwohl folgt die Gleichheit beyder Dreyecke nicht.

Beweis.

Man schneide die Kugel durch den Mittelpunkt so, daß die Ebene dieses größten Kreises auf der Ebene des Sektors ace senkrecht stehet, so wird cd die Durchschnittslinie der Ebene fcd gegen die Ebene eca und fd ein Bogen des größten Kreises seyn, der auf ae senkrecht stehet. Nun nehme man bd = de, so ist das Dreyeck bfd = dfe, weil der Winkel fdb = fde; ed = db und fd = fd (§. 12.), also fe = fb. Nun haben die beyden Dreyecke afb und afe den gemeinschaftlichen Winkel a und die gemeinschaftliche Seite fa, und ausserdem sind die dem gleichen Winkel a entgegengesetzten Seitenlinien fb und fe ebenfalls gleich groß, und gleichwohl sind die Winkel afe und afb so wie die Seitenlinien ae und ab ungleich groß.

§. 15.

Zusatz.

Man verlängere af und ae so weit, bis sie in g zusammenstoßen, so ist der Winkel g = a. Nun ist ferner der Winkel gbf = aef, fb = fe, und demungeachtet sind die Winkel gfb und afe, so wie die Seitenlinien bg und ae ungleich groß. Demnach

können auch in zweyen sphärischen Dreyecken zwey Winkel g und a, gbf und aef, so wie die Seitenlinien fb und fe, welche einem Winkel entgegengesetzet sind, gleich groß seyn, und doch folgt die Gleichheit beyder Dreyecke nicht.

§. 16.

Aufgabe.

Es ist auf der Oberfläche der Kugel das sphärische Dreyeck abc (fig. 143.) gegeben, man soll auf eben derselben Kugel ein anderes sphärisches Dreyeck verzeichnen, deßen Seitenlinien die Winkel des vorigen, und deßen Winkel die Seitenlinien des vorigen Dreyecks zu 180° ergänzen.

Auflösung.

Man verlängere die Seitenlinien ab und bc, welche den Winkel b einschließen, nach d und e, bis db und be Quadranten werden, so kann man durch die Punkte d und e einen Bogen eines größten Kreises führen, wozu der Pol b gehöret. Ferner verlängere man auch die Seitenlinien ab und ac des Winkels a nach l und m, bis al und am Quadranten werden, und lege durch l und m einen Bogen eines größten Kreises, so ist auch a der zu diesem Kreise gehörige Pol. Wenn nun de und lm gehörig verlängert in f zusammenstoßen, so ist f von a sowohl als von b um 90° entfernet, folglich ist f der Pol eines größten Kreises, wozu der Bogen ab gehöret. Endlich verlängere man auch cb und ca des Winkels c nach i und h, bis ci und ch Quadranten werden, und führe durch i und h den Bo-

gen

gen eines größten Kreises, welcher die vorigen gf und fk in den Puncten k und g schneide, so ist alsdenn c der Pol des Bogens gk, k der Pol des Bogens hm und g der Pol des Bogens ie.

Nun ist ge = 90°, df = 90°, also ge + df = 180°; aber gè = de + dg, mithin de + dg + df = 180°; ferner dg + df = gf, demnach de + gf = 180° oder gf + b = 180°, weil de das Maas des Winkels b ist. Eben so erhellet, daß fk + a = 180°, und gk + c = 180°. Ferner hat man be = 90°, ic = 90°, also be + ic = 180°; aber be = bc + ce, mithin ic + bc + ce = 180°; ferner ic + ce = ie, also auch ie + bc = 180°; oder ie + g = 180°, weil bc das Maas von g ist. Auf eben diese Weise ist klar, daß hm + k = 180° und dl + f = 180°. Also hat das Dreyeck gkf die verlangte Eigenschaft.

§. 17.

Lehrsatz.

In einem jeden sphärischen Dreyecke ist die Summe aller dreyer Winkel > 2R aber kleiner als 6R.

Beweis.

Wenn das Dreyeck gkf wie im vorigen §. verzeichnet worden, so hat man b = 2R — gf; a = 2R — kf; c = 2R — kg, also b + a + c = 6R — (gf + kf + kg) und b + a + c < 6R. Ferner ist gf + kf + kg < 4R (§. 9.) also auch b + a + c > 2R.

Zweytes Kapitel.

Von der Berechnung der sphärischen Dreyeck oder von der eigentlichen sphärischen Trigonometrie.

§. 18.

Erklärung.

Aus den von den sphärischen Drevecken bisher bewiesenen Sätzen läßt sich einsehen, daß aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks das ganze sphärische Dreyeck bestimmt werde, nur ein Paar Fälle ausgenommen. Demnach können sich aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks die übrigen durch Hülfe der Rechenkunst finden laßen. Diei Wissenschaft nun, welche die Regeln zeigt, wie aus drey gegebenen Stücken die übrigen drey Stücke eines sphärischen Dreyecks durch Rechnnng zu finden sind, heißt die sphärische Trigonometrie.

§. 19.

Erklärung.

Man theilet überhaupt die sphärischen Dreyecke in **rechtwinklichte** und **schiefwinklichte**, obgleich in einem sphärischen Dreyecke alle drey Winkel rechte seyn können. Die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, nennt man ebenfalls die Perpendikulärseiten oder Catheti, und die, welche dem rechten Winkel gegenüber stehet, die Hypothenuse.

§. 20.

§. 20.

Willkührlicher Satz.

In der Folge bedeute allemal der rechte Winkel = r, die Hypothenuse = h, die beyden Catheti a und b, und die anliegenden Winkel m und n.

§. 21.

Zusatz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke ist der rechte Winkel allemal bekannt. Wenn man also im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke drey Stücke als gegeben annimmt, so müßen ausser dem rechten Winkel noch zwey andere bekannt seyn, um das unbekannte daraus unmittelbar herzuleiten. Beym rechtwinklichten sphärischen Dreyecke können demnach folgende Fälle unterschieden werden. Es können (fig. 144.) vorkommen.

1. alle drey Seiten oder a, b, h.

2. zwey Seiten und ein Winkel, mithin

a. die beyden Perpendikulärseiten und ein Winkel oder a, b, m oder a, b, n.

b. Eine Perpendikulärseite, die Hypothenuse nud ein Winkel, also

α. eine Perpendikulärseite, der gegenüberliegende Winkel und die Hypothenuse oder a, m, h oder b, n, h.

β. eine Perpendikulärseite, der anliegende Winkel und die Hypothenuse oder, a, n, h oder b, m, h.

3. Eine Seite und zwey Winkel, also

a. eine Perpendikulärseite und zwey Winkel oder a, m, n oder b, m, n.

b. die Hypothenuse und zwey Winkel oder h, m, n.

§. 22.

Lehrsatz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhalten sich

1. Die Sinus der Seitenlinien, wie die Sinus der entgegengesetzten Winkel.

Beweis.

Wenn (fig. 144.) c der Mittelpunkt, und cn, cr und cm die Halbmesser der Kugel sind, welche in die Winkelpunkte des rechtwinklichten sphärischen Dreyecks mnr laufen, so schließen die Kreisausschnitte ncr, rcm und ncm ein körperliches Dreyeck ein, und die Ebene des Kreisausschnittes cnr ist auf der Ebene des Sektors cmr senkrecht, weil r ein rechter Winkel ist. Läßt man nun no auf die Linie cr senkrecht, so steht auch no auf der Ebene des Kreisausschnittes crm senkrecht (§. 274. Geom.). Ferner ziehe man in der Ebene cmr die Linie op auf cm senkrecht, so liegt pn in der Ebene cnm und die Ebene des Dreyecks nop steht auf der Ebene des Sektors crm senkrecht. Weil nun auch pm auf der Ebene des Dreyecks npo senkrecht ist, so ist nop der Neigungswinkel der Ebene ncm gegen die Ebene mcr. Hieraus ergiebt sich

cn : sin. tot = no : sin. nco und
cn : sin. tot = np : sin. ncp, mithin

no:

no : sin. nco = np : sin. ncp oder
no : np. = sin. nco : sin. ncp

Ausserdem ist

no : np = sin. npo : sin. tot. also
sin. npo : sin. tot. = sin. nco : sin. ncp.

Weil nun npo = m, nco = a, ncp = h, so hat man
sin. m : sin. tot = sin. a : sin. h oder
sin. tot. : sin. m = sin. h : sin. a oder
sin. tot. : sin. h = sin. m : sin. a. Aus eben dem Grunde ist auch sin. tot : sin. h = sin. n : sin. b, u. daher
sin. m : sin. a = sin. n : sin. b.

§. 23.

Aufgabe.

Es kommen im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke a, m, h oder b, n, h (§. 21. n. 2. lit. α) vor, man soll aus zweyen davon gegebenen Stücken die übrigen durch Rechnung finden.

Auflösung.

Man hat sin. tot : sin. h = sin. m : sin. a
sin. h : sin. tot. = sin. a : sin. m
sin. m : sin. a = sin tot : sin. h. Fern.
sin. tot : sin. h = sin. n : sin. b
sin. h : sin. tot. = sin. b : sin. n
sin. n : sin. b = sin. tot : sin. h.

Es sey z. E. h = 44° 12′, m = 28° 43′, so giebt die Rechnung l. sin. h = 9,8433356
l. sin. m = 9,6816741
19,5250097
l. sin. tot. = 10
l. sin. a = 9,5250097 also
a = 19° 34′.

§. 24.

Zusatz.

Weil spitze und stumpfe Winkel, die sich einander zu 180° ergänzen, einerley trigonometrische Linien haben, wenn der Quersinus ausgenommen wird (§. 8. eben. Trigonom.), so wird es hier zweifelhaft, ob die gesuchten Winkel größer oder kleiner als 90°, und die Seitenlinien größer oder kleiner als ein Quadrant sind, zumal da die Sinus zwischen 90° und 180° positiv bleiben. In dem vorigen Kapitel aber ist erwiesen, daß ein sphärisches Dreyeck durch drey gegebene Stücke bestimmt werde, nur ein Paar Fälle ausgenommen. Demnach fällt in den Fällen des vorigen §. aller Zweifel weg, ausgenommen, wenn das gesuchte die Hypothenuse ist (§. 15.). Es muß also ein jeder von den Catheten ein Quadrant, kleiner oder größer als ein Quadrant werden, wenn der gegenüberliegende Winkel = 90°, kleiner oder größer als 90° ist.

§. 25.

Lehrsatz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

II. Der Sinus totus zum Sinus eines Catheti, wie die Tangente des an dieser Seite anliegenden Winkels zur Tangente des gegenüberstehenden Catheti.

Beweis.

In dem Dreyecke noc ergiebt sich

oc : on = sin. tot : tang. nco und

on

on : op = tang. npo : sin. tot. folglich
oc : op = tang. npo : tang. nco. (§. 190. Arith.)

Nun ist oc : op = sin. tot : sin. ocp, also auch
sin. tot : sin. ocp = tang. npo : tang. nco oder
sin. tot : sin. b = tang. m : tang. a.

Aus eben dem Grunde hat man auch
sin. tot : sin. a = tang. n : tang. b.

§. 26.

Aufgabe.

Es kommen im sphärischen rechtwinklichten Dreyecke (§. 21. n. 2. lit. a) a, b, n oder a, b, m vor, man soll aus zweyen davon gegebenen Stücken die übrigen finden.

Auflösung.

Aus den Proportionen
sin. tot : sin. b = tang. m : tang. a und
sin. tot : sin. a = tang. n : tang. b
findet man aus zweyen allemal das dritte, wenn die Proportion so geordnet wird, daß das zu suchende die letzte Stelle erhält.

Es sey z. E. b = 33° 26′, m = 48° 46′, so giebt die Rechnung

l. sin. b =	9,7411251	
l. tang. m =	10,0577767	
	19,7989018	
l. sin. tot =	10	
l. tang. a =	9,7989018, mithin	
a =	32° 11′.	

§. 27.

Zusatz.

Wenn m $<$ 90°, so bleibt die Tangente positiv, mithin wird auch a $<$ 90°. Ist aber m $=$ 90°, so wird tang m $=$ ∞, also auch tang. a $=$ ∞, und folglich a $=$ 90°. Ist endlich m $>$ 90°, so wird tang. m negativ, also auch tang. a, und foglich a $>$ 90°. Wird aber b aus m und a, oder a aus n und b gesucht, so bleibt es zweifelhaft, ob a oder b größer oder kleiner als 90° zu nehmen ist, weil in den Proportionen

tang. m : tang. a $=$ sin. tot : sin. b und
tang. n : tang. b $=$ sin. tot : sin. a

die Tangenten entweder positiv oder negativ sind, nachdem m, a, n, b kleiner oder größer als 90°.

§. 28.

Lehrsatz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

III. Der ganze Sinus zum Cosinus eines Cathe-ti, wie der Cosinus des andern Catheti zum Cosinus der Hypothenuse.

Beweis.

In dem Dreyecke nco ist

cn : co $=$ sin. tot : cos. nco

und in dem Dreyecke ncp

cp : cn $=$ cos. ncp : sin. tot, mithin

cp : co $=$ cos. ncp : cos. nco.

In dem Dreyecke cop aber ist

cp :

cp : co = cos. ocp : sin. tot, folglich
cos. ocp : sin. tot. = cos. ncp : cos. nco. oder
sin. tot : cos. ocp. = cos. nco : cos. ncp oder
sin. tot : cos. nco = cos. ocp : cos. ncp oder
sin. tot : cos. b = cos. a : cos. h.

§. 29.

Aufgabe.

Es kommen im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke (§. 2[illegible].) a, h, b vor, man soll aus zweyen gegebenen Stücken das dritte finden.

Auflösung.

Man ordne die Proportion sin. tot : cos. b = cos. a : cos. h so, daß das zu suchende die letzte Stelle einnimmt. Es sey z. E. b = 43° 46′, a = 34° 53′, so giebt die Rechnung

l. cos. b = 9,8586351
l. cos. a = 9,9138943

19,7725294

l. sin. tot. = 10

l. cos. h. = 9,7725294
also h = 53° 41′.

§. 30.

Zusatz.

Wenn b = 90° ist, so ist cos. b = 0, mithin wird auch cos. h = 0, und daher h = 90°. Sind b und a < 90°, so bleiben cos. b und cos. a positiv, also bleibt auch cos. h positiv, und h < 90°. Wenn aber b und a > 90°, so bleibt auch cos. h positiv, folglich auch h < 90°. Ist endlich a oder b < oder

> 90°,

$> 90°$, wenn b oder a $>$ oder $< 90°$, so wird cos. h negativ, folglich h $> 90°$. Hieraus folgt zugleich, daß es in diesen Fällen keinen zweydeutigen gebe.

§. 31.

Lehrsatz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

IV. Der Sinus totus zum Cosinus eines Cateti, wie der Sinus des anliegenden Winkels zum Cosinus des gegenüberstehenden Winkels.

Beweis.

Es sey das bey r (fig. 145.) rechtwinklichte Dreyeck rmn auf der Oberfläche der Kugel, deßen Mittelpunkt c ist, verzeichnet. Man verlängere nun mr bis e und mn bis d, so daß me und md Quadranten werden, führe alsdenn durch die Punkte d und e einen größten Kreis, so ist m der dazu gehörige Pol, und der Bogen de ist das Maas des Winkels m. Die Ebenen der beyden Sektoren rcn und ced sind auf der Ebene der Sektors mcr senkrecht, mithin schneiden sie sich in der geraden Linie cf, welche auf der Ebene des Sektors mcr senkrecht stehet, mithin ist fc die Axe, welche zu den Bogen me gehöret und f der dazu gehörige Pol und er das Maas des sphärischen Winkels f. Das Dreyeck dfn ist bey d rechtwinklicht, also hat man

sin. tot : sin. fn = sin. fnd : sin. fd

Nun ist aber sin. fn = cos. a, sin. fnd = sin. n, sin. fd = cos. de = cos. m, also

sin. tot : cos. a = sin. n : cos. m.

Aus

Aus eben dem Grunde hat man auch

sin. tot : cos. b = sin. m : cos. n.

§. 32.

Aufgabe.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke kommen a, m, n oder b, m, n (§. 21. n. 3. lit. a) vor, man soll aus zweyen gegebenen Stücken die dritten finden.

Auflösung.

In den Proportionen

sin. tot : cos. a = sin. n : cos. m und

sin. tot : cos. b = sin. m : csin. n

ordne man die Glieder so, daß das Gesuchte die vierte Stelle einnimmt. Es sey z. E. a = 33° 16′, n = 46°, so giebt die Rechnung

l. cos. a =	9,9222721	
l. sin. n =	9,8569341	
	19,7792062	
l. sin. tot. =	10	
l. cos. m =	9,7792062	

also m = 53° 2′

§. 33.

Zusatz.

Wenn a < 90°, so ist cos. a positiv, und es bleibt auch cos. m positiv, n mag < oder > 90° seyn, also m < 90°. Ist aber a > 90°, so wird cos. a negativ, mithin auch cos. m, und folglich m > 90°. Sucht man n aus a und m, so ist es zweifelhaft, ob n, < oder > 90° ist, weil a und m entweder

stumpf

stumpf oder spitz. Auch wird es zweifelhaft, ob m > oder < 90° ist, wenn m aus b und n gesucht wird.

§. 34.

Lehrsatz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

V. Der Sinus totus zur Cotangente eines Winkels, wie die Cotangente des andern Winkels zum Cosinus der Hypothenuse,

Beweis.

Nach dem §. 25. hat man (fig. 145.)

sin. tot : sin. dn = tang. fnd : tang. df

Da nun sin. dn = cos. h, tang. fnd = tang. n, tang. df = cot. de = cot. m, so ist

sin. tot : cos. h = tang. n : cot. m oder

sin. tot : tang. n = cos. h : cot. m.

Weil nun sin. tot : tang. n = cotang. n : sin. tot. (§. 12. eben. Trigonom.) so hat man auch

cot. n : sin. tot = cos. h : cot. m oder

sin. tot : cot. n = cot. m : col. h.

§. 35.

Aufgabe.

Es kommen im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke (§. 21. n. 3. litt. b) h, m, n vor, man soll aus zweyen gegebenen Stücken das dritte finden.

Auflösung.

In der Proportion

sin. tot ; cot. n = cot. m : cos. h

ordne

ordne man die Glieder so, daß das Gesuchte die letzte Stelle bekommt. Es sey z. E. n = 50° 30′, m = 44° 33′ so findet man l. cot. n = 9,8035105

l. cot. m = 9,8494850

19,6529955

l. sin. tot = 10

l. cos. h = 9,6529955

also h = 63° 16′

§. 36.

Zusatz.

Wenn n und m < 90°, so bleiben cot. n und cot. m positiv, also auch cos. h positiv und demnach h < 90°; ist ferner n und m > 90°, so sind cot. n und cot. m negativ, mithin cos. h wiederum positiv, also auch hier h < 90°. Wenn aber n > 90° und m < 90° oder n < 90° und m > 90°, so wird allemal cos. h negativ, also h > 90°. Ist endlich n oder m = 90°, so ist cot. n oder cotan. m = 0, also auch cos. h = 0, und daher h = 90°. Hieraus folgt, daß es hier gar keinen zweydeutigen Fall giebt.

§. 37.

Lehrsatz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

VI. Der Sinus totus zum Cosinus eines der beyden übrigen Winkel, wie die Cotangente des anliegenden Catheti zur Cotangente der Hypothenuse.

Beweis.

Beweis.

In dem Dreyecke dfn (fig. 145.) hat man

sin. tot : sin. df = tang. dfn : tang. dn.

Weil aber sin. df = cos. de = col. m, tang. dfn = cot. b, tang. dn = cot. h, so ergiebt sich

sin. tot : cos. m = cot. b : cot. h

Aus eben dem Grunde ist auch

sin. tot : cos. n = cot. a : cot. h = tang. h : tang. a.

§. 38.

Aufgabe.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke (§. 21. n. 2. litt. β) kommen b, m, h oder a, n, h vor, man soll aus zweyen gegebenen Stücken die dritten finden.

Auflösung.

In den Proportionen

sin. tot : cos. m = cot. b : cot. h und

sin. tot : cos. n = cot. a : cot. h

ordne man die Glieder so, daß das Gesuchte die dritte Stelle erhält. Es sey z. E. m = 24° 25′, b = 36° 4′, so hat man

l. cos. m	=	9,9593102
l. cot. b	=	9,9075901
		19,8669003
l. sin. tot.	=	10
l. cos. h	=	9,8669003
also h	=	53° 31′

§. 39.

§. 39.

Zusatz.

Wenn m und b $<$ oder $>$ 90°, so sind cos. m und cot. b positiv oder negativ, und cot. h allemal positiv, also h $<$ 90°. Ist aber m $>$ 90° und b $<$ 90, oder m $<$ 90° und b $>$ 90°, so ist cot. h negativ, also h $>$ 90°. Ist endlich m $=$ 90°, so ist auch h $=$ 90°. Demnach giebt es hier keinen zweydeutigen Fall.

§. 40.

Willkührlicher Satz.

In dem schiefwinklichten sphärischen Dreyecke αβγ (fig. 146.) bezeichne man in der Folge die schiefen Winkel mit α, β, γ und die Seitenlinien mit a, b, c.

§. 41.

Zusatz.

Wenn im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke αβγ drey Stücke gegeben worden, um die vierten unmittelbar daraus zu finden, so können nur folgende Fälle eintreten: man suchet nemlich

1. eine Seitenlinie, und es können gegeben seyn
   a. zwey Seiten und ein Winkel, also
      α. Zwey Seiten und der eingeschloßene Winkel, also gesucht b und gegeben a, c, α; u. s.
      β. Zwey Seiten und ein anliegender Winkel, oder gesucht c und gegeb. b, a. α oder b, a, γ.
   b. eine Seite und zwey Winkel, mithin
      α. eine Seite und zwey anliegende Winkel, also gesucht b oder c und gegeb. a, β, α; u. s.

β. eine Seite und zwey Winkel, welche an der gesuchten Seite liegen, oder gesucht c und gegeb. a, α, γ oder b, α, γ;

γ. eine Seite und zwey Winkel, wovon einer der gesuchten, und der andere der gegebenen Seite gegenüberliegt, also gesucht c und gegeb. β, α, b; u. f.

c. alle drey Winkel α, γ, β.

2. Man suchet einen Winkel, also

a. gegeben alle drey Seitenlinien a, b, c.

b. zwey Seitenlinien und ein Winkel, folglich

α. zwey Seitenlinien und der eingeschloßene Winkel, also gesucht β oder γ und gegeben a, α, c; u. f.

β. zwey Seitenlinien und ein anliegender Winkel, und der andere anliegende Winkel wird gesucht, oder gesucht γ und gegeben α, a, b; u. f.

γ. zwey Seitenlinien und ein anliegender Winkel, und der von den gegebenen Seitenlinien eingeschloßene Winkel wird gesucht, oder gesucht β, und gegeben a, b, γ oder a, b, α. u. f.

c. eine Seitenlinie und zwey Winkel

α. eine Seitenlinie und die beyden anliegenden Winkel, oder gesucht γ und gegeb. c, α, β u. f.

β. eine Seitenlinie und zwey Winkel, wovon einer der gegebenen Seite gegenüberstehet, oder gesucht β und gegeb. b, γ, α oder a, α. γ. u. f.

§. 42.

Lehrsatz.

Im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke αβδ verhalten sich die Sinus der Seitenlinien, wie die Sinus der entgegengesetzten Winkel.

Beweis.

Man lege durch die Spitze β, den Mittelpunkt der Kugel und durch den Pol des größten Kreises, wozu der Bogen c gehöret, welcher dem Winkel β entgegengesetzet ist, eine Ebene. Diese wird die Kugelfläche in einem größten Kreise schneiden, wozu der Bogen βδ gehöret, welcher durch β gehet und auf dem Bogen c irgendwo in dem Punkte δ senkrecht steht. Nun erhält man statt des schiefwinklichten sphärischen Drey ecks αβδ zwey rechtwinklichte αβδ und δβδ, und es ergiebt sich

sin. tot : sin. a = sin. α : sin. βδ und
sin. b : sin. tot. = sin. βδ : sin. δ (§. 22.) also
sin. b : sin. a = sin. α : sin. δ (190. Arith.)
od. sin. b : sin. α = sin. a : sin. δ.

§. 43.

Zusatz.

Sollte die Linie βδ (fig. 147.) nicht innerhalb sondern ausserhalb des Dreyecks fallen, so finden die Schlüsse des vor. §. dennoch ihre Anwendung. Ob die Linie βδ innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks αβδ fällt, beurtheilet man so:

Sind die Winkel α und αδβ $<$ oder $>$ 90°, so fällt das Perpendikel βδ allemal innerhalb des Dreyecks. Denn ist α und αδβ $<$ 90°, so ist βδδ $>$

90° (§. 5.). Wäre nun βδ nicht senkrecht auf αϰ, sondern βε, so wäre βε < 90°, weil α < 90° ist aber auch βε > 99°, weil βϰε > 90° (§. 10.), welches wiedersprechend wäre. Eben so widersprechend wäre es, wenn α und αϰβ > 90°.

Ist aber α < 90° und αϰβ > 90° oder α > 90° und αϰβ < 90°, so fällt das Perpendickel βε ausserhalb des Dreyecks. Ist nemlich αϰβ > 90°, so ist βϰε < 90°. Wäre nun βε nicht senkrecht auf αε sondern βδ; so würde βδ zugleich < und > 90° seyn, weil α < 90 und βϰα > 90°, welches widersprechend ist.

§. 44.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke (fig. 146.) zwey Seitenlinien a und b nebst dem anliegenden Winkel α gegeben, man soll den Winkel ϰ finden (§. 41. n. 2 litt. b. lit. β.).

Auflösung.

Nach den 42. §. kann man schließen

sin. b : sin. α = sin. a : sin. ϰ.

Aus eben dem Grunde ist auch

sin. a : sin. ϰ = sin. b : sin. α. und

sin. b : sin. α = sin. c : sin. β.

Es sey b = 46° 12′, α = 34° 14′, a = 50° 32′, so hat man

l. sin. α = 9,7501723

l. sin. a = 9,8874061

19,6375784.

l. sin.

l. sin. b = 9,8583929.
L. sin. α = 9,7791755, also α = 36° 58′.

Ob aber der gesuchte Winkel spitz oder stumpf, bleibt hier zweydeutig. (§. 14.).

§. 45.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke αβγ zwey Winkel α und β und eine Seitenlinie b gegeben, man sucht die Seitenlinie c (§. 41. n. 1. litt. b. litt. g.).

Auflösung.

Man hat sin. α : sin. b = sin. β : sin. c. Eben so ist f.
sin. α : sin. b = sin. γ : sin. a. und
sin. γ : sin. a = sin. α : sin. b.
Es sey z. E. α = 44° 36′, b = 50° 30′, β = 32° 32′ so giebt die Rechnung

l. sin. b = 9,8874061
l. sin. β = 9,7266264
19,6140325
l. sin. α = 9,8464318
l. sin. c = 9,7676007
also c = 35° 50′.

Auch hier ist es zweifelhaft, ob die gesuchte Seite kleiner oder größer als 90° ist (§. 15.).

§. 46.

Lehrsatz.

Wenn im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke die Linie βδ auf der Linie c senkrecht steht, so verhalten sich

I. Die Sinus der abgeschnittenen Theile umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Winkel.

Beweis.

Nach dem 25. §. hat man

sin. tot : sin. $\alpha\delta$ = tang. α : tang. $\beta\delta$ und

sin. $\delta\gamma$: sin. tot = tang. $\beta\delta$: tang. γ

folglich sin. $\delta\gamma$: sin. $\alpha\delta$ = tang. α : tang. γ.

§. 47.

Aufgabe.

Im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke sind γ, α, c gegeben, man sucht den Winkel γ. (§. 41. n. 2. litt. b. litt. α.)

Auflösung.

Vermöge des §. 38. findet man mittelst der Proportion sin: tot : cos. α = cot. a : cot. $\alpha\delta$, die Linie $\alpha\delta$. Ferner ergiebt sich $\delta\gamma = \alpha\gamma - \alpha\delta$, und nach der Proportion sin. $\delta\gamma$: sin. $\alpha\delta$ = tang. α : tang. γ findet man den Winkel γ. Es sey z. E. $\alpha = 44°$ 13′, a = 50° 30′, c = 77° 46′, so giebt die Rechnung

l. cos. α = 9,8552192
l. cot. a = 9,9161045

19,7713237

l. sin. t. = 10

l. cot. $\alpha\delta$ = 19,7713237

also $\alpha\delta = 59°\ 26'$, und $\delta\gamma = 77°\ 46' - 59°\ 26' =$ 18° 20′ mithin

l. sin. $\alpha\delta$ = 9,9350223
l. tang. α = 9,9881234

19,

19,92315 57
l. sin. ds. = 9,4976824
l. tang. s = 10,4254733
also s = 69° 25′.

§. 48.

Zusatz.

Sollten α und a < oder > 90° seyn, so wird allemal αδ < 90°. Ist nun αδ < αs, so fällt δ zwischen α und s; wenn aber αδ > αs ist, so fällt δ über s hinaus, und ds wird negativ, welches nach dem §. 43. leicht berutheilet werden kann. Ist aber eins von beyden α und a größer und das andere kleiner als 90°, so wird auch αδ > 90°, und es ist auch hier leicht zu beurtheilen, ob δ zwischen α und s oder über s hinausfalle. Uebrigens wird s kleiner oder größer als 90°, wenn α kleiner oder größer als 90° ist.

§. 49.

Aufgabe.

Im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke sind die beyden Winkel α und s nebst der Seite α gegeben, man soll die Seite c finden (§. 41. n. 1. litt. b. litt. α).

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke αβδ findet man αδ nach der Proportion sin. tot : cos. α = tang. a : tang. αδ (§. 37.). Darauf setze man

tang. s : tang. α = sin. αδ : sin. ds (§. 46.).

und es ist c = αδ + ds, wenn s und α entweder < oder > 90°; hingegen c = αδ − ds, wenn eins

von beyden γ und α größer das andere $< 90°$ ist. Es sey z. E. $\alpha = 34° 16'$, $\gamma = 56° 30$, $a = 44'$, so giebt die Rechnung

l. cos. α = 9,9172040
l. tan. a = 9,9848372
19,9021412
l. sin. t. = 10
l. tan. $\alpha\delta$ = 9,9021412, und
$\alpha\delta = 38° 35'$. Ferner
l. tang. α = 9,8333394
l. sin. $\alpha\delta$ = 9,7949425
19,6282819
l. tang. γ = 10,1792171
l. sin. $\delta\gamma$ = 9,4490648 und
$\delta\gamma = 16° 32'$ mithin $c = 38° 35 + 16° 32' = 55° 7'$.

§. 50.

Lehrsatz.

Im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

II. Der Cosinus des einen von der lothrechten Linie $\beta\delta$ abgeschnittenen Stücks $\alpha\delta$ zum Cosinus des andern Stücks $\delta\gamma$, wie die Cosinus der anliegenden Seitenlinien a und b.

Beweis.

Im rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ hat man sin. tot: cos. $\beta\delta$ = cos. $\alpha\delta$: cos. a, und im Dreyecke $\beta\delta\gamma$; sin. tot: cos. $\beta\delta$ = cos. $\delta\gamma$: cos. b (§. 28.).
mithin cos. $\alpha\delta$: cos. a. = cos. $\delta\gamma$: cos. b oder
cos. $\alpha\delta$: cos. $\delta\gamma$ = cos. a : cos. b.

§. 51.

§. 51.

Zusatz.

Man setze $90° - \alpha\delta = m$, und $90° - \delta\gamma = n$, also $\frac{1}{2}(m+n) = 90° - \frac{1}{2}(\alpha\delta + \delta\gamma) = 90° - \frac{1}{2}$ ac und $\frac{1}{2}c = 90° - \frac{1}{2}(m+n)$; aber auch $\frac{1}{2}(m-n) = \frac{1}{2}(\delta\gamma - \alpha\delta)$, so hat man cos. $\alpha\delta$: cos. $\delta\gamma$ = sin. m : sin. n, mithin auch cos. a : cos. b. = sin. m : sin. n. Hieraus folgt cos. a + cos. b : cos. a — cos. b = sin. m + sin. n : sin. m — sin. n (§. 191. Arithm.), also ferner cos. a + cos. b : cos. a — cos. b = tang. $\frac{1}{2}$ (m + n) : tang. $\frac{1}{2}$ (m — n) (§. 27. eben. Trigon.) oder cos. a + cos. b : cos. a — col. b = cot. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}(\delta\gamma - \alpha\delta)$; mithin auch cot. $\frac{1}{2}$(a + b) : tan. $\frac{1}{2}$(b — a) = cot. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}(\delta\gamma - \alpha\delta)$.

§. 52.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke die drey Seitenlinien a, b, c gegeben, man sucht den Winkel α (§. 41. n. 2. litt. a.)

Auflösung.

Vermittelst der Proportion cot. $\frac{1}{2}$(a + b) : tang. $\frac{1}{2}$(b — a) = cot. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}(\delta\gamma - \alpha\delta)$ kann man $\frac{1}{2}(\delta\gamma - \alpha\delta)$, und daraus nach den 186. §. der Arithm. $\alpha\delta$ und $\delta\gamma$ finden. Es ist nemlich $\delta\gamma = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(\delta\gamma - \alpha\delta)$, und $\alpha\delta = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}(\delta\gamma - \alpha\delta)$. In dem rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ kann man alsdenn schließen cot. $\alpha\delta$: cot. a = sin. tot : cos. α.

Es sey z. E. a = 33°, 4′, b = 56° 30′, c = 70° 42′ so giebt die Rechnung

l. tang. $\frac{1}{2}$ (b — a) = 9,3136076
l. cot. $\frac{1}{2}$ c = 10.1491392

19,4627468

l. cot. $\frac{1}{2}$ (a + b) = 9,9979787

l. tang. $\frac{1}{2}$ ($\delta\varkappa$ — $\alpha\delta$) = 9,4647681, also
$\frac{1}{2}$($\delta\varkappa$ — $\alpha\delta$) = 16° 15′ demnach
$\delta\varkappa$ = 35° 21′ + 16° 15′ = 51° 36′ und $\alpha\delta$ = 35° 21′ — 16° 15′ = 19° 6′, mithin

l. cot. a = 10,1836176
l. sin. t. = 10

20,1836176

l. cot. $\alpha\delta$ = 10,4605713

l. cos. α = 9,7230463, u. α = 48° 5′.

Anmerk. Sollte b < a seyn, so muß die erste Proportion also verändert werden:

cot. $\frac{1}{2}$(a + b) : tang. $\frac{1}{2}$(a − b) = cot. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}$ ($\alpha\delta$ — $\delta\varkappa$.).

§. 53.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke zwey Seitenlinien a und c nebst dem eingeschloßenen Winkel α gegeben, man soll die dritte Seitenlinie b finden (§. 41. n. 1. litt. a. litt. α.)

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ hat man

sin. tot : cos. α = tang. a : tang. $\alpha\delta$

und man findet $\delta\varkappa$ = c — $\alpha\delta$. Nun kann man ferner setzen cos. $\alpha\delta$: cos. $\delta\varkappa$ = cos. a : cos. b.

Es sey z. E. a = 43° 16′, c = 56° 12′ und α = 32° 14′ so findet man

l. cos.

l. cos. α = 9,9273103
l. tan. a = 9,9737071

19,9010174

l. sin. t. = 10

l. tan. $\alpha\delta$ = 9,9010174 und
$\alpha\delta$ = 38° 31′. Ferner
l. cos. $\delta\varkappa$ = 9,9790594
l. cos. a = 9,8622338

19,8412932
l. cos. $\alpha\delta$ = 9,8934439

l. cos. b. = 9,9478493
b = 27° 32′.

§. 54.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke zwey Seitenlinien a und b, und der anliegende Winkel α gegeben, man sucht die dritte Seitenlinie c (§. 41. n. 1. lit. a. lit. ß.).

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ findet man $\alpha\delta$ nach der Proportion

sin. tot : cos. α = tang. a : tang. $\alpha\delta$

Hiernächst kann man setzen

cos. a : cos. b = cos. $\alpha\delta$: cos. $\delta\varkappa$. Demnach $c = \alpha\delta \mp \delta\varkappa$. Ist nun $b < a$, also auch $\delta\varkappa$ kleiner als $\alpha\delta$, so wird $\alpha\delta$ nicht bestimmt gefunden, weil alsdenn $c = \alpha\delta + \delta\varkappa$ und $c = \alpha\delta - \delta\varkappa$ seyn kann; wäre aber $b > a$, also auch $\delta\varkappa > \alpha\delta$, so wird $c = \alpha\delta + \delta\varkappa$. Es sey z. E. $a = 34° 22′$, $b = 53° 16′$, $\alpha = 36° 44′$, so findet man

l. cos.

l. cos. a = 8,9038644
l. tang. a = 9,8349673
19,73883 17
l. sin. t. = 10
l. tang. ad = 9,7388317, und
ad = 28° 43′. Ferner
l. cos. b = 9,7767676
l. cos. ad = 9,9430028
19,7197704
l. cos. a = 9,9038644
l. cos. $\delta\gamma$ = 9,8159060, und
$\delta\gamma$ = 49° 8′, also
$c = 28° 43′ + 49° 8′, = 77° 51′$.

§. 55.

Lehrsatz.

Im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

III. Der Sinus des Winkels $a\beta\delta$ zum Sinus $\delta\beta\gamma$ wie der Cosinus des Winkels a zum Cosinus des Winkels γ.

Beweis.

In dem rechtwinklichten Dreyecke $a\beta\delta$ ist sin. tot : cos. $\beta\delta$ = sin. $a\beta\delta$: a und in dem Dreyecke $\delta\beta\gamma$

sin. tot : cos. $\beta\delta$ = sin. $\delta\beta\gamma$: cos. γ (§. 31.) also
sin. $a\beta\delta$: cos. a = sin. $\delta\beta\gamma$: cos. γ oder
sin. $a\beta\delta$: sin. $\delta\beta\gamma$ = cos. a : cos. γ

§. 56.

Zusatz.

Aus der Proportion cos. γ : cos. α = sin. $\delta\beta\gamma$. sin. $\alpha\beta\delta$ folgt auch cos. γ + cos. α : cos. γ — cos. α = sin. $\delta\beta\gamma$ + sin. $\alpha\beta\delta$: sin. $\delta\beta\gamma$ — sin. $\alpha\beta\delta$ (§. 191. Arithm.), also ferner cos. γ + cos. α : cos. γ — cos. α = tan. $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma + \alpha\beta\delta)$: tang. $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta)$, oder cot. $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$: tang. $\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$ = tang. $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma + \alpha\beta\delta)$: tang. $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta)$.

§. 57.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke die Seite a nebst den anliegenden Winkeln α und β gegeben, man soll den dritten Winkel γ suchen (§. 41. n. 2. lit. c. lit. α).

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ hat man cot. α : sin. tot. = cos. a : cot. $\alpha\beta\delta$ (§. 34.) und man findet $\delta\beta\gamma = \beta - \alpha\beta\delta$. Alsdenn kann man ansetzen sin. $\alpha\beta\delta$: sin. $\delta\beta\gamma$ = cos. α : cos. γ. Im Fall nun $\alpha\beta\delta > \beta$, so wird $\gamma = 180° - \beta\gamma\delta$ gesucht. Es sey z. E. a = 56° 4′, α = 44° 30′, β = 79° 18′ so giebt die Rechnung.

l. cos. a = 9,74681 15
l. sin. tot. = 10
19,74681 15
l. cot. α = 10,0075803
l. cot. $\alpha\beta\delta$ = 9,7392312, und
$\alpha\beta\delta$ = 61° 15′, und $\delta\beta\gamma$ = 79° 18′ — 61° 15′ = 18° 3′, folglich

l. sin.

l. sin. δβγ = 9,4911471
l. cos. α = 9,8532421
19,2443892
l. sin. αβδ = 9,9428643
l. cot. γ = 9,4015249, also
γ = 75° 14′.

§. 58.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke zwey Winkel α und γ, nebst der Seite b, welche den einen Winkel gegenüberliegt, gegeben, man sucht den dritten Winkel β (§. 41. n. 2. lit. c. lit. β.).

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke δβγ kann man ansetzen cot. γ : sin. tot = cos. b : cot. δβγ (§. 34.) und man findet den Winkel δβγ. Ferner hat man auch den Winkel αβδ nach der Proportion

cos. γ : cos. α = sin. δβγ : sin. αβδ, und man findet β = δβγ + αβδ, wenn γ und α < oder > 90°; ist aber eins von beyden γ und α kleiner und das andere größer als 90°, so wird β = αβδ − δβγ. Es sey z. E. a = 46° 14′, γ = 34° 6′, b = 50°, so giebt die Rechnung

l. cos. b = 9,8080675
l. sin. t. = 10
19,8080675
l. cot. γ = 10,1693787
l. cot. δβγ = 9,6386888, also
δβγ = 66° 29′. Ferner ist

l. cos.

l. cos. α = 9,8399323
l. sin. $\delta\beta\gamma$ = 9,96234281
19,7022751
l. cos. γ = 9,98422421
l. cos. α = 9,71805091
also α = 58° 30′, demnach
β = 66° 29 + 58° 30′ = 124° 59′.

§. 59.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke alle drey Winkel α, β, γ gegeben, man sucht die Seite a (§. 41, n. 1, lit. c.).

Auflösung.

Nach der Proportion
cot. $\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$: tang. $\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$ = tang. $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma + \alpha\beta\delta)$: tang. $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta)$
findet man $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta)$, und nach dem 186. §. der Arith ergiebt sich $\delta\beta\gamma = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta)$ und $\alpha\beta\delta = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta)$. Hiernächst kann man ansetzen
sin. tot : cot. α = cot. $\alpha\beta\delta$: cos. a (§. 34.).
Es sey α = 69° 14′, β = 77° 12′, γ = 30° 4″, so findet man
l. t. $\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$ = 9,5511525
l. t. $\frac{1}{2}\beta$ = 9,9021604
19,4533129
l. cot. $\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$ = 10,0708044
l. t. $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma-\alpha\beta\delta)$ = 9,3825085, und $\frac{1}{2}(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta)$ = 13° 35
also $\alpha\beta\delta$ = 25° 1′. Ferner

l. cot.

l. cot. α = 9,5788669
l. cot. $\alpha\beta\delta$ = 10,3306681
14,9095350
l. sin. tot. = 10
l. sin. a = 9,9095350, also a = 35° 43'.

§. 60.

Lehrsatz.

Im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

IV. Der Cosinus des Winkels $\alpha\beta\delta$ zum Cosinus $\delta\beta\varepsilon$ umgekehrt wie die Tangente b zur Tangente a.

Beweis.

Im rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ ist
sin. tot : cot. $\beta\delta$ = cos. $\alpha\beta\delta$: cot. a und im Dreyecke $\delta\beta\varepsilon$
sin. tot : cot. $\beta\delta$ = cos. $\delta\beta\varepsilon$: cot. b, mithin
cos. $\alpha\beta\delta$: cot. a = cos. $\delta\beta\varepsilon$: cot. b oder
cos. $\alpha\beta\delta$: cos. $\delta\beta\varepsilon$ = cot. a : cot. b.
Weil nun cot. a : cot. b = tang. b : tang. a, so hat man auch cos. $\alpha\beta\delta$: cos. $\delta\beta\varepsilon$ = tang. b : tang. a.

§. 61.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke eine Seite a und die anliegenden Winkel α und β. gegeben, man sucht eine von den gegenüberliegenden Seiten b (§. 41. n. 1 lit. b. lit. α).

Auflösung

Nach der Proportion

cot.

cot. α : sin. tot. = cos. a : cot. $\alpha\beta\delta$ (§. 34.) des rechtwinklichten Dreyecks $\alpha\beta\delta$ findet man den Winkel $\alpha\beta\delta$, und hiernächst $\delta\beta\gamma = \beta - \alpha\beta\delta$. Alsdenn kann man weiter ansetzen

cos. $\delta\beta\gamma$: cos. $\alpha\beta\delta$ = tang. a : tang. b

Es sey z. E. $\eta = 36° 14'$, $\alpha = 40°$, $\beta = 64° 30'$, so giebt die Rechnung

l. cos. a = 9,9066671
l. sin. tot = 10
19,9066671
l. cot. α = 10,0761865
l. cot. $\alpha\beta\delta$ = 9,8304806, also
$\alpha\beta\delta$ = 55° 55', und $\delta\beta\gamma = 64° 30' - 55° 55' = 8° 35'$. Ferner hat man
l. cos. $\alpha\beta\delta$ = 9,7485967
l. tan. a = 9,8649755
19,6134722
l. cos. $\delta\beta\gamma$ = 9,9950893
l. tan. b = 9,6183829
also b = 22° 33'.

§. 62.

Aufgabe.

Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke die Seitenlinien a und b nebst dem Winkel α gegeben, man sucht den eingeschloßenen Winkel β (§. 41. n. 2. lit. b. lit. g).

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ giebt die Proportion cot. α : cos. a = sin. tot : cot. $\alpha\beta\delta$ den Winkel $\alpha\beta\delta$. Hiernächst kann man setzen tang. b :

tang. a = cos. αβδ : cos. δβx, und es ist β = αβδ + δβx, wenn b > a; ist aber b < a so bleibt β unbestimmt.

Anmerk. Die bisher gelehrten Proportionen sphärischer Dreyecke, um aus drey gegebenen Stücken die vierten unmittelbar zu finden, sind für Anfänger die leichtesten und bequemsten. Die Analyse zeigt noch andere Wege, welche auf Formeln führen, woraus das unbekannte durch Hülfe des bekannten gefunden wird. Demjenigen, welcher sich die vorgetragenen Lehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie hinlänglich bekannt gemacht hat, wird es nun nicht mehr schwer fallen, diese Wege ohne weitere Führung zu finden. Zur Probe können folgende beyde Aufgaben dienen.

1. Es sind im schiefwinklichten sphärischen Dreyecke alle drey Seitenlinien gegeben, man sucht einen Winkel (§. 52.). Es sey (fig. 148.) αcx ein Sektor eines Kreises, de der Sinus und ce der Cosinus des Bogens δx, δb der Sinus und cb der Cosinus des Bogens αδ, αd der Sinus und cd der Cosinus des Bogens αx. Weil nun δx = αx − αδ, so ist auch de = sin. (αx − αδ), und ce = cos. (αx − αδ). Man verlängere ed und cα bis sie in dem Punkte g zusammenkommen, ziehe aus dem Punkte b die Linie bf auf eg und ba auf cx senkrecht, so ist der Winkel δbf = αbc = fgb (§. 187. 177. Geom.), mithin das Dreyeck bfδ ∼ cαd ∼ cba. Demnach ergiebt sich cα : cd = cb : ca, oder, wenn der Halbmeßer cα = 1 angenommen wird, 1 : cos. αx = cos. αδ : ca, also ca = cos. αx. cos. αδ,

$\alpha\delta$, und $c\alpha : \alpha d = b\delta : bf$ oder $1 : \sin. \alpha\gamma = \sin. \alpha\delta : bf$, also $bf = \sin. \alpha\gamma . \sin. \alpha\delta$. Hieraus folgt

$$ca + bf = ce = \cos. (\alpha\gamma - \delta\alpha) = \cos. \alpha\gamma . \cos. \alpha\delta + \sin. \alpha\gamma . \sin. \alpha\delta,$$

und aus eben dem Grunde $\cos. (\alpha\gamma + \delta\alpha) = \cos. \alpha\gamma . \cos. \alpha\delta - \sin\ \alpha\gamma . \sin. \alpha\delta$, also ferner $\cos. (\alpha\gamma + \delta\alpha) + \cos. (\alpha\gamma - \delta\alpha) = 2 \cos. \alpha\gamma . \cos. \alpha\delta$; $\cos. (\alpha\gamma + \delta\alpha) - \cos. (\alpha\gamma - \delta\alpha) = 2 \sin. \alpha\gamma . \sin. \alpha\delta$. Setzt man nun $\alpha\gamma + \delta\alpha = m$ und $\alpha\gamma - \delta\alpha = n$, so ist $\alpha\gamma = \frac{1}{2}(m + n)$ und $\delta\alpha = \frac{1}{2}(m - n)$ (§. 186. Arith.). Demnach wird auch

$\cos. m + \cos. n = 2 \cos. \frac{1}{2}(m + n) \cos. \frac{1}{2}(m - n)$ und $\cos. m - \cos. n = 2 \sin. \frac{1}{2}(m + n) \sin. \frac{1}{2}(m - n)$. In dem schiefwinklichten Dreyeck $\alpha\beta\gamma$ (fig. 146.) ist nun $\cos. a : \cos. b = \cos. \alpha\delta : \cos. \delta\gamma$ also $\cos. \delta\gamma = \frac{\cos. \alpha\delta . \cos. b}{\cos. a}$; aber auch $\cos. \delta\gamma = \cos. (\alpha\gamma - \alpha\delta)$, mithin $\frac{\cos. \alpha\delta . \cos. b}{\cos. a} = \cos. \alpha\gamma . \cos. \alpha\delta + \sin. \alpha\gamma . \sin. \alpha\delta$, und $\frac{\cos. b}{\cos. a} = \cos. \alpha\gamma + \sin. \alpha\gamma . \frac{\sin. \alpha\delta}{\cos. \alpha\delta}$, oder, weil $\frac{\sin. \alpha\delta}{\cos. \alpha\delta} = \text{tang.} \alpha\delta$ (§. 12. eben. Trigonom.), $\frac{\cos. b}{\cos. a} = \cos. \alpha\gamma + \sin. \alpha\gamma . \text{tang.} \alpha\delta$, also ferner $\frac{\cos. b}{\cos. a} - \cos. \alpha\gamma = \sin. \alpha\gamma . \text{tang.} \alpha\delta$, oder $\frac{\cos. b - \cos. \alpha\gamma . \cos. a}{\cos. a} = \sin. \alpha\gamma . \text{tang.} \alpha\delta$, und $\text{tang.} \alpha\delta = \frac{\cos. b - \cos. \alpha\gamma . \cos. a}{\cos. a . \sin. \alpha\gamma}$, Fer-

ner ist $1 : \text{cos.}\ \alpha = \text{tang.}\ a : \text{tang.}\ \alpha\delta$ (§. 37.), mithin $\text{tang.}\ \alpha\delta = \text{cos.}\ \alpha . \text{tang.}\ a$, und daher cos. α.

$$\text{tang.}\ a = \frac{\text{cos.}\ b - \text{cos.}\ \alpha\gamma . \text{cos.}\ a}{\text{cos.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma}$$

Weiter ist

$$\text{tang.}\ a = \frac{\text{sin.}\ a}{\text{cos.}\ a}$$ (§. 12. eben. Trigonom.). mithin

$$\text{cos.}\ \alpha . \frac{\text{sin.}\ a}{\text{cos.}\ a} = \frac{\text{cos.}\ b - \text{cos.}\ a . \text{cos.}\ \alpha\gamma}{\text{cos.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma}$$, oder

$$\text{cos.}\ \alpha = \frac{\text{cos.}\ b - \text{cos.}\ a . \text{cos.}\ \alpha\gamma}{\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma}$$.

Vermöge des 19. §. der eb. Trigon. ist $2\text{sin.}\ \frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \text{cos.}\ \alpha = 1 - \frac{\text{cos.}\ b - \text{cos.}\ a . \text{cos.}\ \alpha\gamma}{\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma} =$

$$\frac{\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma - \text{cos.}\ b + \text{cos.}\ a . \text{cos.}\ \alpha\gamma}{\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma} =$$

$$\frac{\text{cos.}\ (a - \alpha\gamma) - \text{cos.}\ b}{\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma}$$. Nun setze man $a - \alpha\gamma = n$ und $b = m$, so ist

$$\text{cos.}\ n - \text{cos.}\ m = 2\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}(m + n) . \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}(m - n)$$

folglich $\text{sin.}\ \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(m + n) . \text{sin.}\ \frac{1}{2}(m - n)}{\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma}$

oder, weil $m + n = a + b - \alpha\gamma$ und $m - n = \alpha\gamma + b - a$,

$$\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(a + b - \alpha\gamma) . \text{sin.}\ \frac{1}{2}(\alpha\gamma + b - a)}{\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma} = \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

Hieraus ergiebt sich nun die Proportion

$\text{sin.}\ a . \text{sin.}\ \alpha\gamma : \text{sin.}\ \frac{1}{2}(a + b - \alpha\gamma) = \text{sin.}\ \frac{1}{2}(\alpha\gamma + b - a) : \text{sin.}\ \frac{1}{2}\alpha^2$, woraus α gefunden werden kann.

2. Es

2. Es sind im sphärischen Dreyecke die drey Winkel gegeben, man sucht eine Seite (§. 59.). Man zeichne das Dreyeck mno (fig. 149.), deßen Seiten die Winkel des Dreyecks $\alpha\beta\gamma$, und deßen Winkel die Seiten dieses Dreyecks zu 180° ergänzen, so ist $mn + \gamma = 180°$, $\alpha\beta + o = 180°$, $\beta + mo = 180°$ und $\alpha + no = 180°$, demnach $\cos. \gamma = -\cos. mn$, $\cos. o = -\cos. \alpha\beta$, $\cos. mo = -\cos. \beta$, $\sin. mo = \sin. \beta$, $\cos. no = -\cos. \alpha$, und $\sin. no = \sin. \alpha$ (§. 3. eben. Trigon.). Nun ist in dem Dreyecke $\cos. o = \frac{\cos. mn - \cos. mo. \cos. no}{\sin. mo. \sin. n}$,

demnach ergiebt sich $-\cos. a = \frac{-\cos. \gamma - \cos. \alpha. \cos. \beta}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}$

oder $\cos. a = \frac{\cos. \gamma + \cos. \alpha. \cos. \beta}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}$. Nach den 19. §. der eb. Trig. ist ferner $2 \sin. \frac{1}{2} a^2 = 1 - \cos. a$, also $\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos. a}{2}}$; aber $\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{(1 - \cos. \frac{1}{2} a^2)}$, mithin auch $1 - \cos. \frac{1}{2} a^2 = \frac{1 - \cos. a}{2}$, und

$$2 \cos. \tfrac{1}{2} a^2 = 1 + \cos. a = 1 + \frac{\cos. \gamma + \cos. \beta. \cos. \alpha}{\sin. \alpha. \sin. \beta} =$$

$$\frac{\sin. \alpha. \sin. \beta + \cos. \gamma + \cos. \beta. \cos. \alpha}{\sin. \alpha. \sin. \beta} =$$

$$\frac{\cos. (\alpha - \beta) + \cos. \gamma}{\sin. \alpha. \sin. \beta}.$$ Setzt man $\alpha - \beta = n$ und $\gamma = m$, so ist

$\cos. m + \cos. n = 2\cos. \frac{1}{2}(m+n).\cos. \frac{1}{2}(m-n)$, also

$\sin. \frac{1}{2}a^2 = \frac{\cos. \frac{1}{2}(m+n).\cos. \frac{1}{2}(m-n).}{\sin. \alpha. \sin. \beta}$. Weil aber $n = \alpha - \beta$ und $m = \gamma$, so ist $m + n = \alpha + \gamma - \beta$ und $m - n = \gamma + \beta - \alpha$, also $\sin. \frac{1}{2}a^2 = \frac{\cos. \frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos. \frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha)}{\sin. \alpha. \sin. \beta}$. Hieraus folgt die Proportion $\sin. \alpha. \sin. \beta : \cos. \frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) = \cos. \frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha) : \sin. \frac{1}{2}a^2$, woraus man a findet.

BIBLIOTHEK

Verbeßerungen und Druckfehler.

S. 45. §. 64. Z. 22. statt ein Divisor lies ein Rest

S. 91. §. 145. Z. 5. nach x setze noch; $3ab^2 = 3(m+n+o+p---)x^2$

S. 97. §. 151. Z. 8. statt $\sqrt[3]{\frac{643200}{100}}$ lies $\frac{\sqrt[3]{643200}}{100}$

S. 98. §. 152. Z. 8. statt $\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b}}$ lies $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$.

S. 102. §. 160. Z. 6. statt $\frac{ma^{(m-1)}\ a^{m-1}b^2}{2a}$ lies $\frac{m.\ m-1.\ a^{m-1}b^2}{2a}$.

S. 103. Z. 2. statt $\frac{ab}{a}$ lies $\frac{mb}{a}$.

S. 110. §. 175. Z. 14. statt $(ae)^2$ lies ae^2.

S. 117. §. 190. Z. 4. statt et + lies et.

S. 133. §. 220. Z. 2. statt Gleichung lies Aufgabe.

S. 168. §. 266. Z. 5. statt $\frac{14}{5} + \frac{11}{5}x$ lies $\frac{14}{5(x-2)} + \frac{11}{5(x+3)}x$.

S. 194

S. 194. §. 311. Von $0{,}5521 = y\Delta xl.$ a bis zu Ende ist die Rechnung falsch, welche von jedem leicht corrigiret werden kann. Das Resultat ist nicht $4833{,}5735 = y + \Delta y$, sondern $4833{,}5431 = y + \Delta y$. Eben so ist auch die Rechnung des folgenden Beyspiels falsch. Das Resultat ist $\text{£}.2709544{,}7 = 6{,}43$.

S. 208. §. 9. Z. 10. statt perpendicaris, lies perpendicularis.

S. 307. §. 241. Z. 7. statt Bogen de lies Bogen le.

S. 314. §. 250. Z. 7. statt dcfg lies dcfe.

Tab. I.

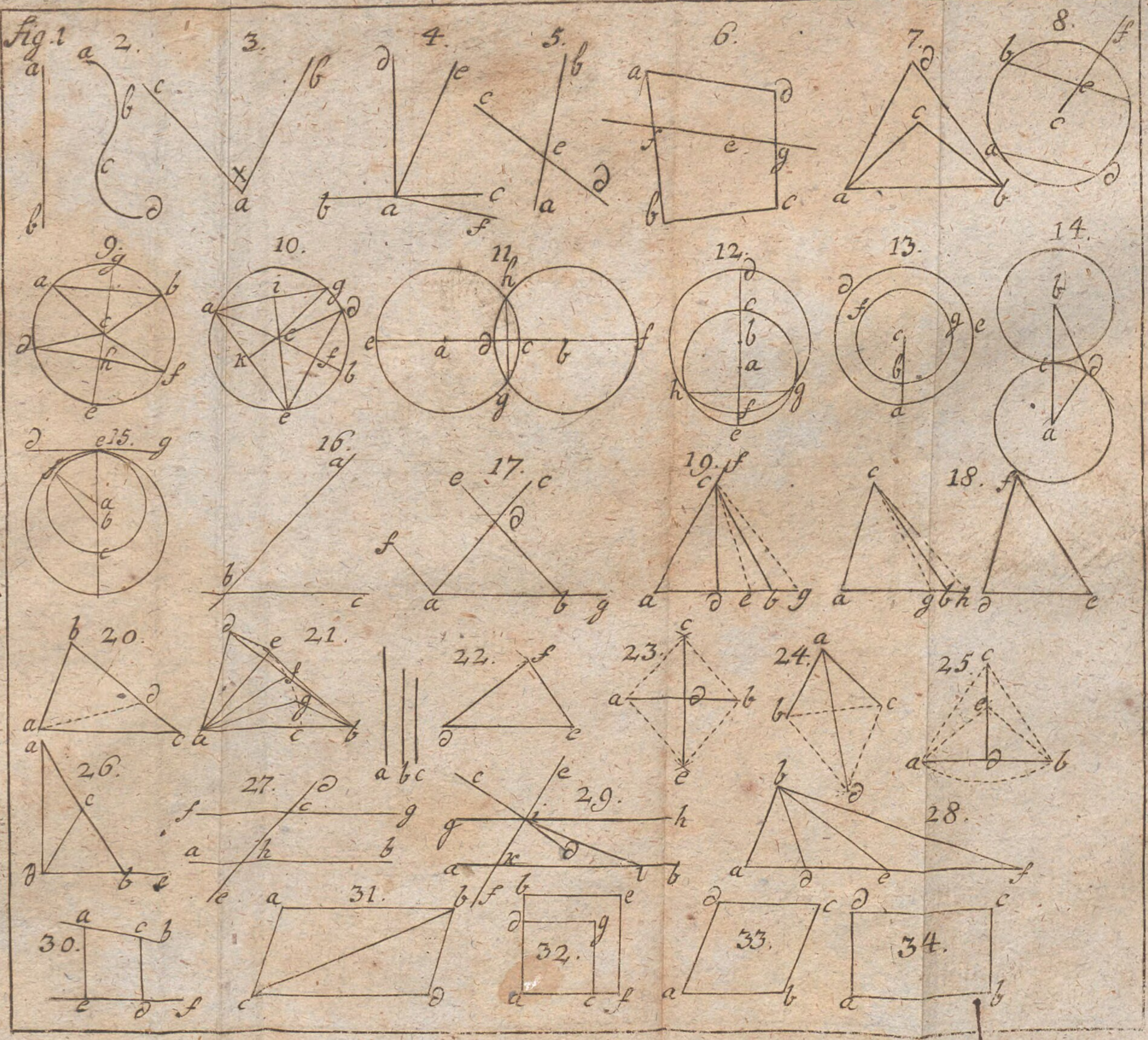
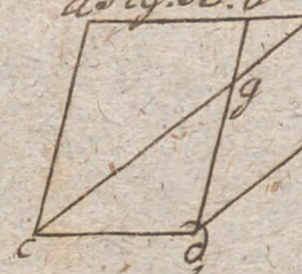


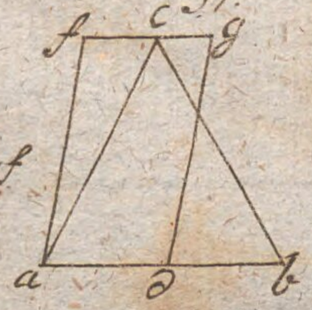
fig. 1
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.

Fig. 35.

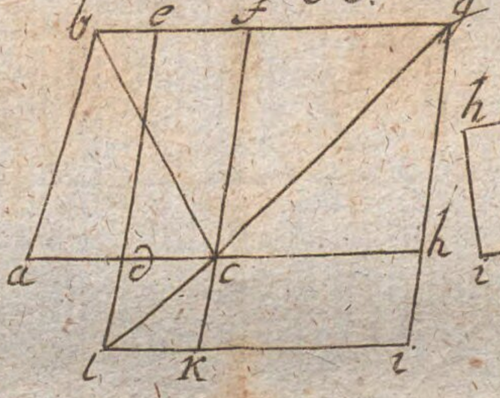


36.

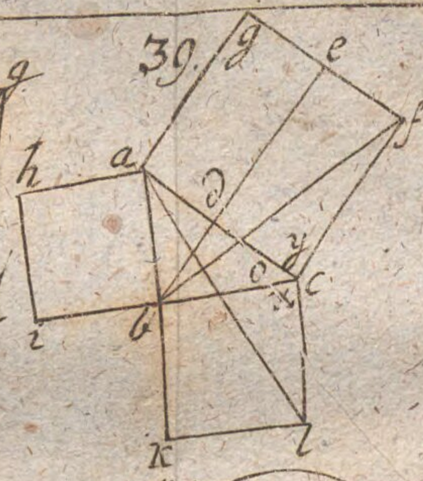
37.



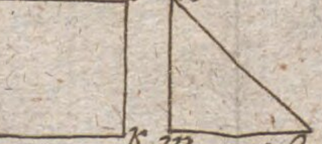
38.



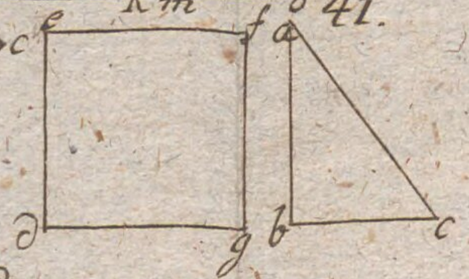
39.



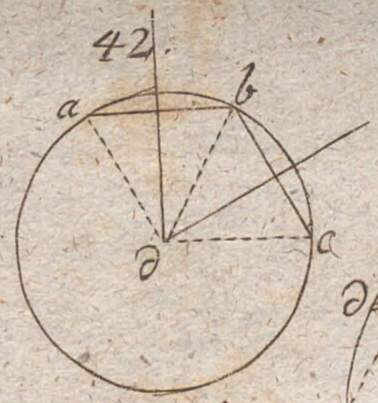
40.



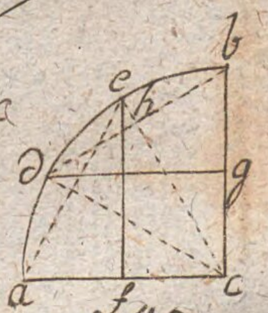
41.



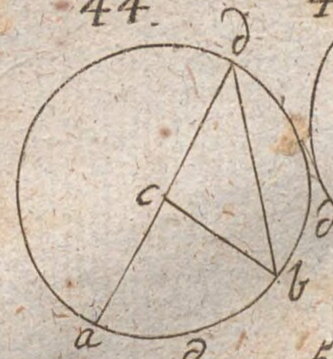
42.



43.



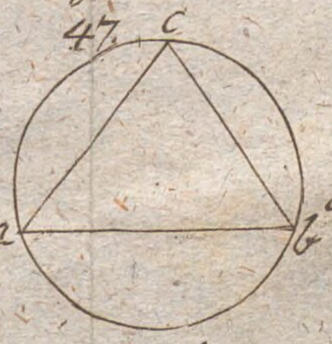
44.



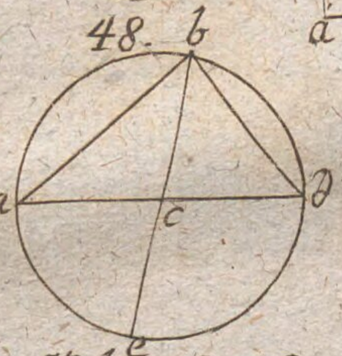
45.

46.

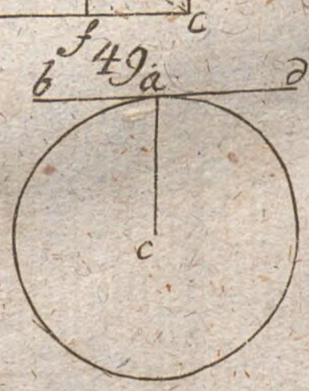
47.



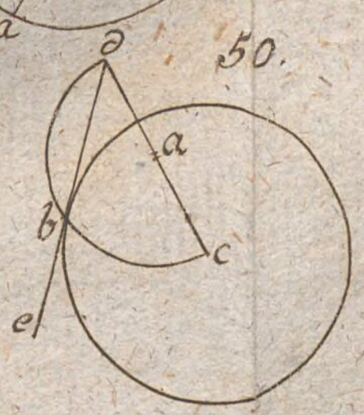
48.



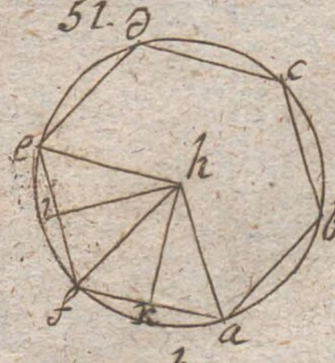
49.



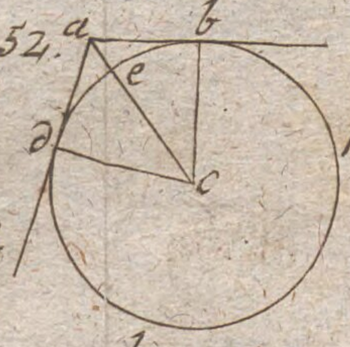
50.



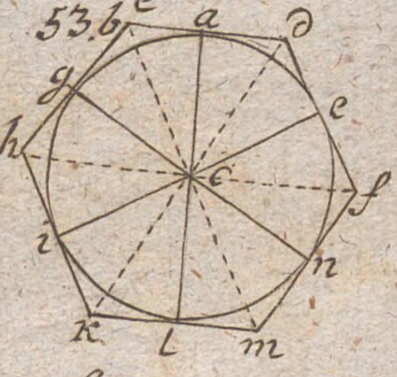
51.



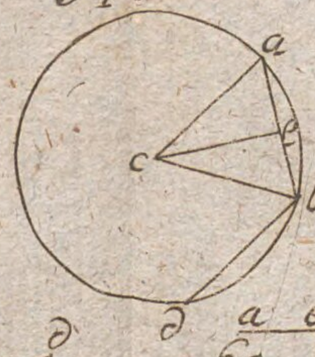
52.



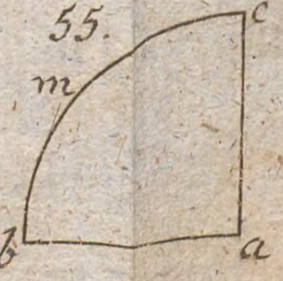
53.



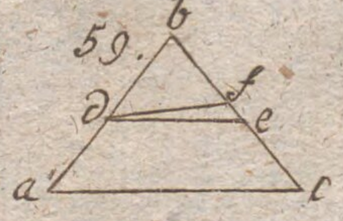
54.



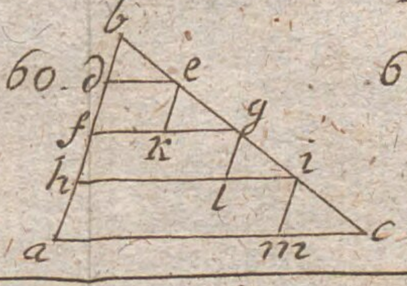
55.



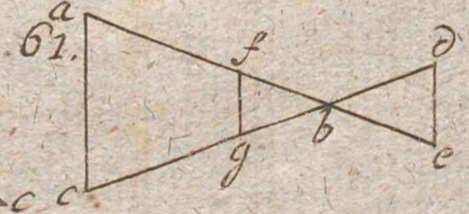
59.



60.



61.



62.

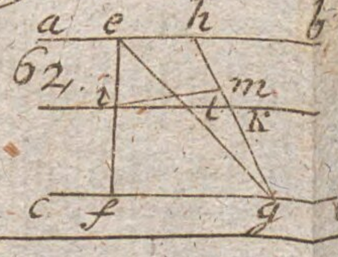
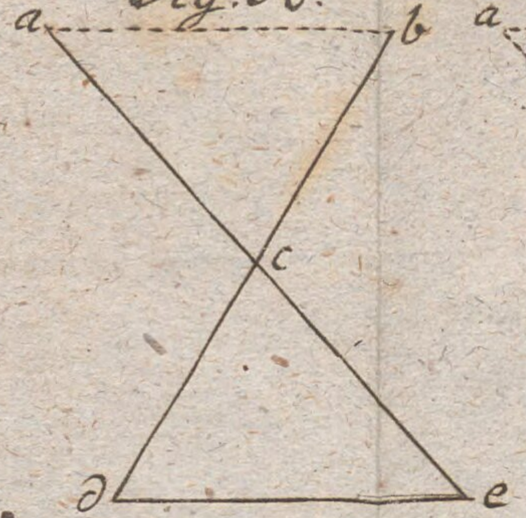
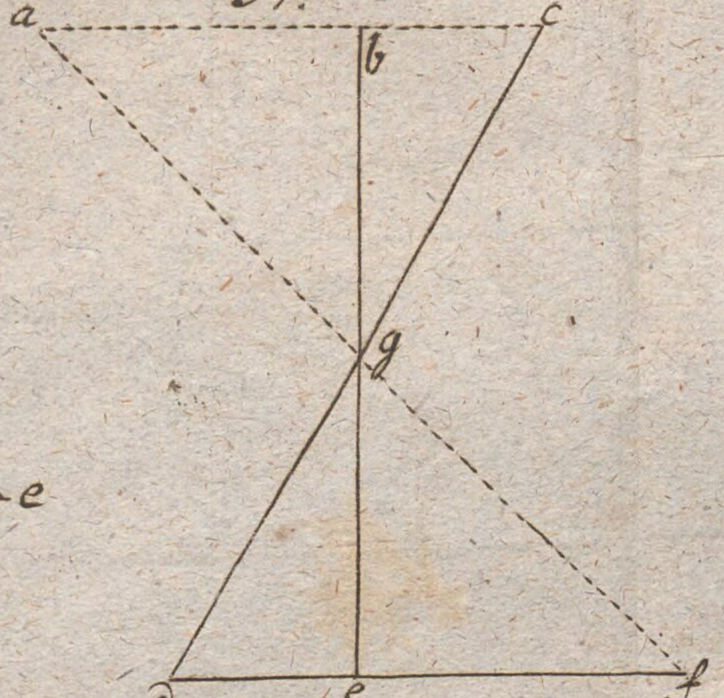


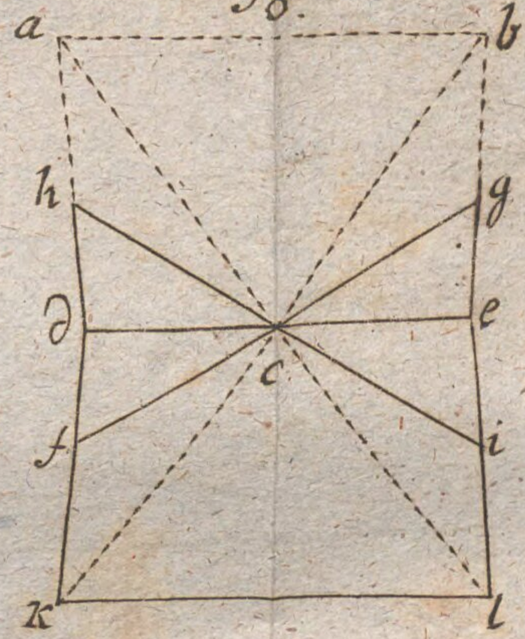
Fig. 56.



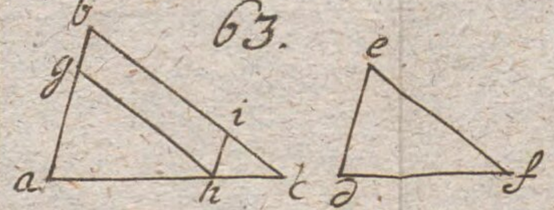
57.



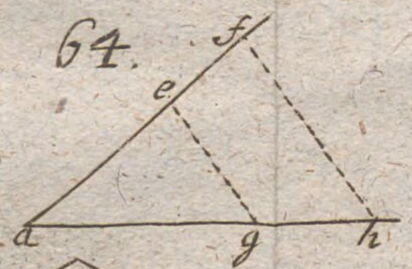
58.

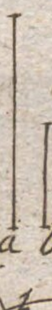


63.

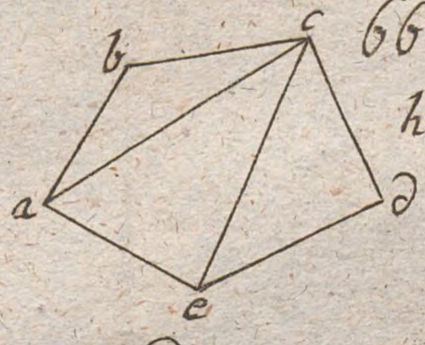


64.

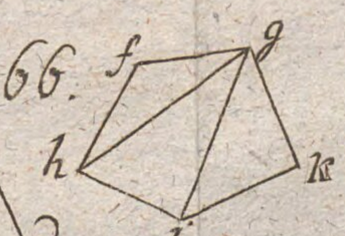




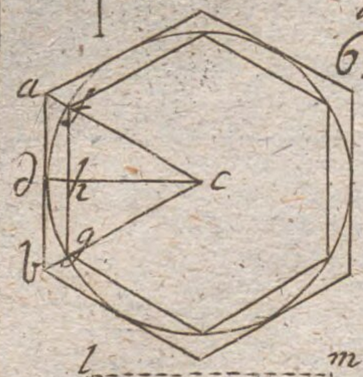
65



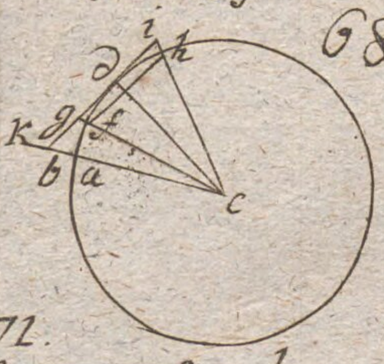
66.



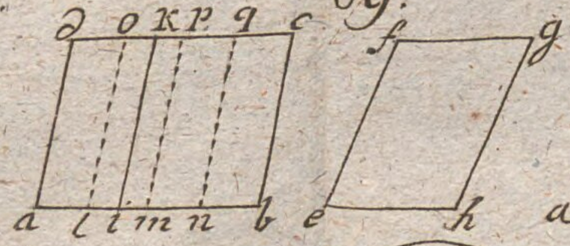
67.

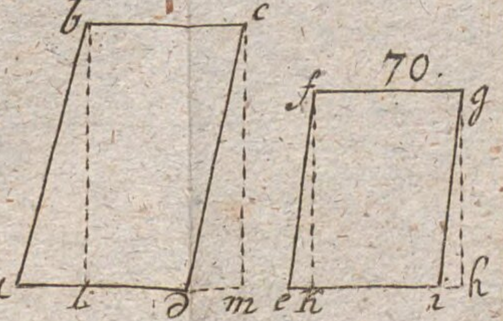


68.



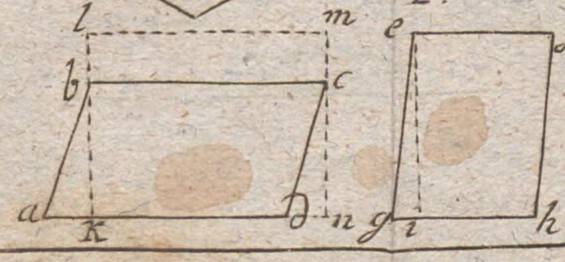
69.



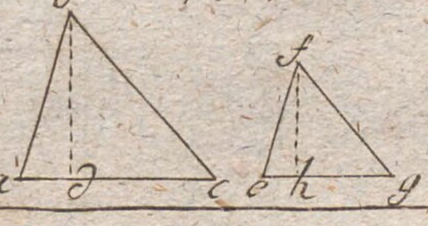


70.

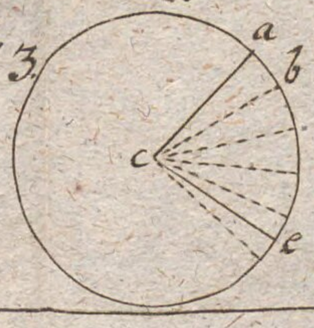
71.



72.



73.



74

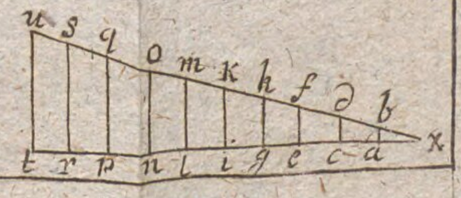
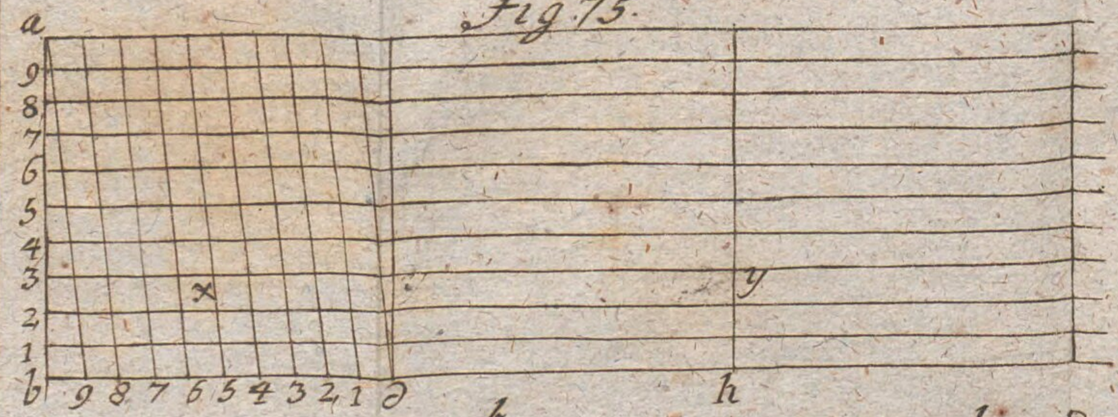
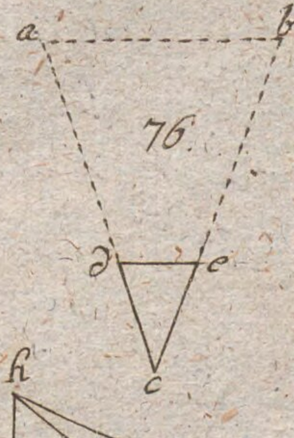
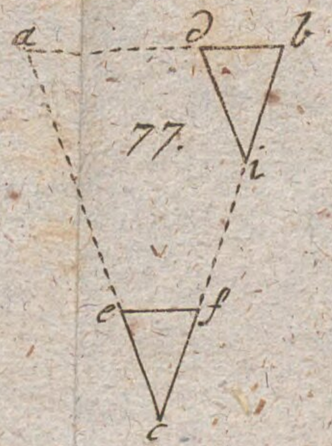
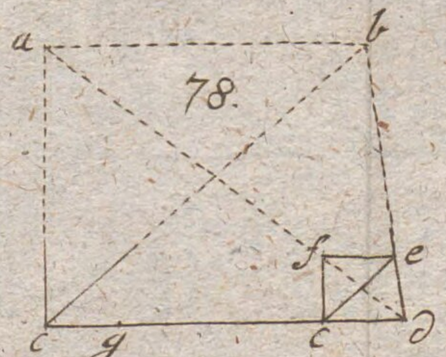


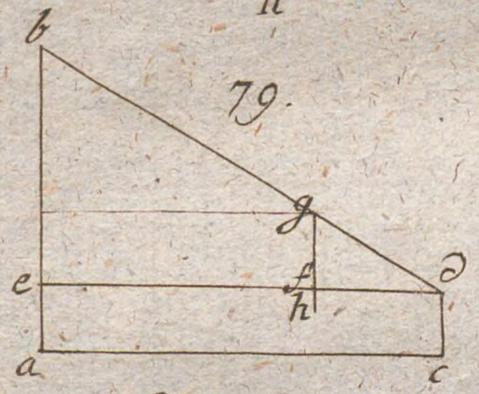
Fig. 75.

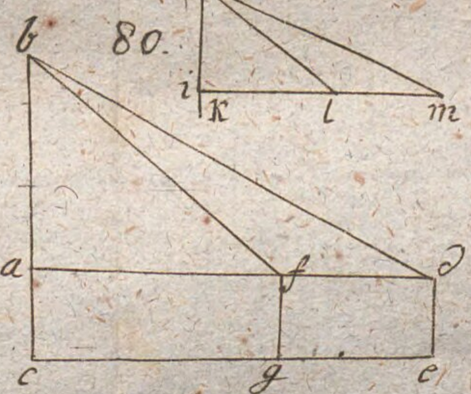

a
9
8
7
6
5
4
3
2
1
b
9 8 7 6 5 4 3 2 1 ∂
x
y
h

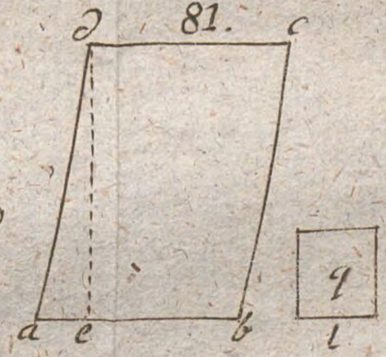

a
b
76.
∂
e
c
h
i
k
l
m


a
∂
b
77.
i
e
f
c

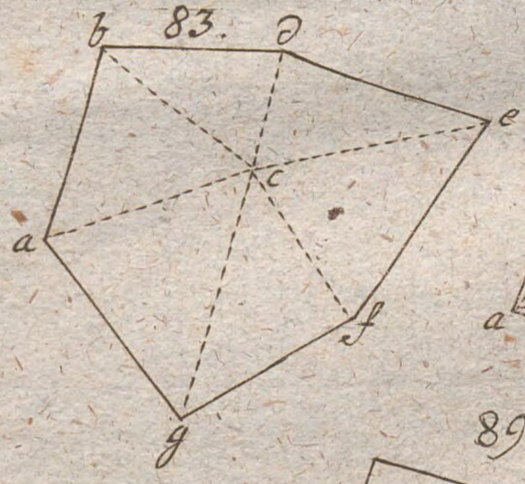

a
b
78.
f
e
c
g
c
∂

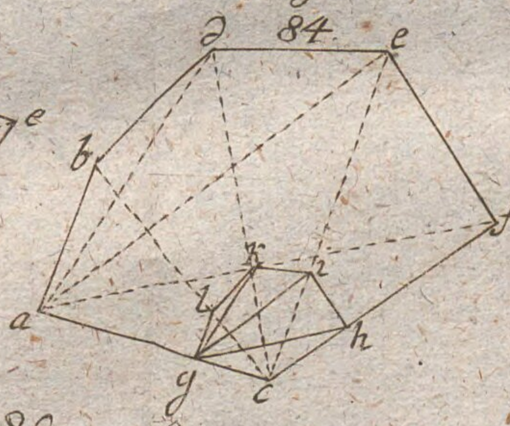

b
79.
g
e
f
h
∂
a
c

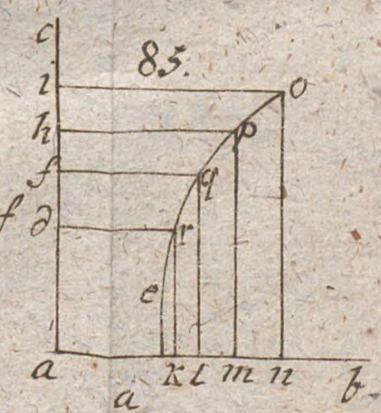

b
80.
a
f
∂
c
g
e

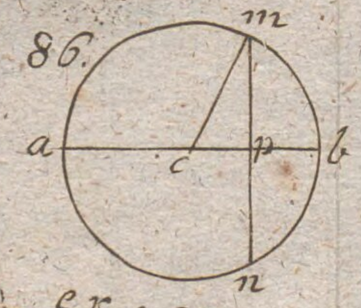

∂
81.
c
a
e
b
q
l

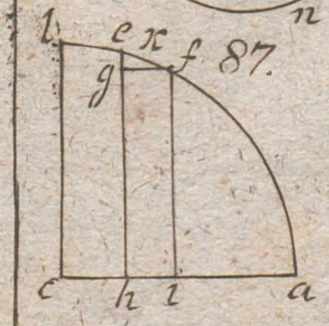
b
82.
c
a
e
∂

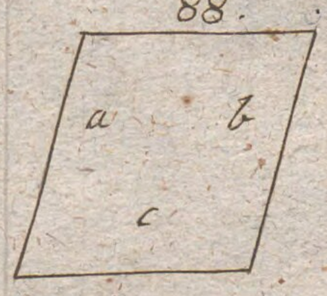

b
83.
∂
e
a
c
f
g

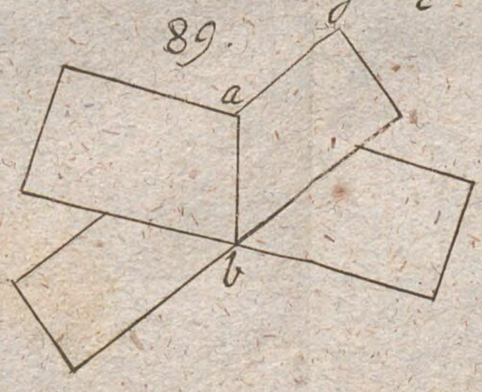

∂
84.
e
b
f
a
g
c
h

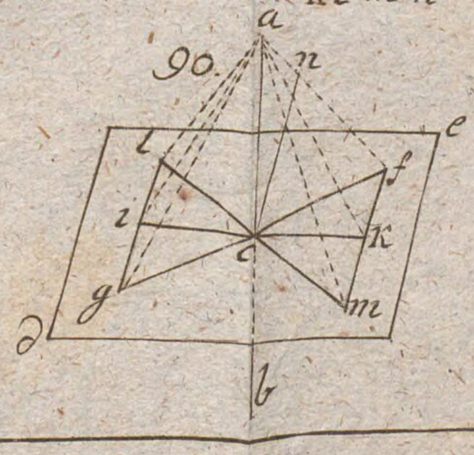

c
i
h
f
∂
e
85.
o
p
q
r
a
x
l
m
n
b


m
86.
a
c
p
b
n


l
e
x
f
87.
g
c
h
i
a


88.
a
b
c


89.
a
b


a
90.
n
l
e
f
i
k
c
g
m
∂
b

Tab. V.

Fig. 91.

92.

93.

94.

95.

96.

97.

98.

99.

100.

101.

102.

103.

104.

105.

106.

107.

108.

109.

110.

111.

112.

113.

114.

115.

116.

117.

118.

Tal. I.

119.

120.

121.

122.

123.

127.

126.

125.

124.

128.

129.

130.

131.

132.

133.

134.

135.

136.

137.

138.

139.

140.

141.

142.

143.

144.

145.

146.

147.

148.

149.

LANDESBIBL.
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Fischer, Johann Carl,

Anfangsgründe der reinen Mathematik oder die gemeine und höhere Rechenkunst, Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie

Jena 1792

Math.p. 151
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081785-8
VD18 11486538-002